



MATEMÁTICAS

MATEMÁTICAS

María Trigueros Gaisman
Mercedes Cortés Lascurain
Emanuel Jinich Charney
Mónica Inés Schulmaister
María Dolores Lozano Suárez
Ivonne Twiggy Sandoval Cáceres

3



Presentación



El trabajo en equipo es importante porque te ofrece la posibilidad de expresar tus ideas y de enriquecerlas con las opiniones de los demás, así desarrollas tu actitud de colaboración y la habilidad para argumentar.

Este libro de texto está destinado a los alumnos de tercer grado de secundaria. Está organizado en secuencias de situaciones problemáticas desarrolladas en torno a diversos contextos que corresponden a las necesidades de aprendizaje de los adolescentes mexicanos y que representan para ellos un desafío intelectual. En la sección “Palabras al docente” se describen las etapas de las secuencias y cómo trabajarlas.

Mediante la organización en secuencias de situaciones problemáticas se intenta que los alumnos enfrenten los nuevos conocimientos matemáticos proporcionándoles sentido y significado. Por medio de la solución de problemas interesantes y preguntas de reflexión se les motiva a desarrollar las competencias matemáticas (Resolver problemas de manera autónoma, Comunicar información matemática, Validar procedimientos y resultados y Manejar técnicas eficientemente) requeridas para la vida en un ambiente de aprendizaje colaborativo, que les ofrece la oportunidad de incrementar el sentido de responsabilidad y las ventajas de compartir con otros sus ideas y conocimientos.

La propuesta didáctica de **Matemáticas 3** se inscribe en el enfoque por competencias y la resolución de problemas, en el cual los alumnos pueden activar sus saberes e integrar nuevos conocimientos para dar respuesta tanto a problemas en situaciones comunes, como a situaciones complejas de la vida diaria.

El trabajo de los alumnos con el libro les permite:

- visualizar con claridad el problema o dar un planteamiento adecuado a la situación;
- seleccionar entre sus conocimientos y habilidades, aquellos que son necesarios para resolver una situación particular;
- poner en práctica los conocimientos y habilidades y ajustarlos en función de la situación;
- prever lo que se necesita para participar en determinada situación;
- reflexionar, en colaboración con sus compañeros, sobre las nuevas herramientas necesarias para resolver cada situación;
- tener la posibilidad de trasladar los nuevos aprendizajes de esa experiencia a situaciones y retos nuevos.

De esta manera, los alumnos construyen los conocimientos con sentido y significado, lo que les permite aplicarlos dentro y fuera de la escuela.

Fotografía

Olivia Vivanco, Thinkstock.com, Shutterstock.com, Durga Archivo Digital, Photostock.com, Latinstock, NASA, Juan José Morín García, Procesofoto, Archivodigital.com, archivo Santillana

Ilustración

Héctor Ovando, Héctor Medina, Gerardo Sánchez, Gustavo del Valle, Margarita Palacios, Marcelo Gómez, Kathia Recio, Ricardo Ríos Delgado, Jorge Aurelio Álvarez Yáñez

La presentación y disposición en conjunto y de cada página de **Matemáticas 3** son propiedad del editor. Queda estrictamente prohibida la reproducción parcial o total de esta obra por cualquier sistema o método electrónico, incluso el fotocopiado, sin autorización escrita del editor.

© 2014 por María Trigueros Gaisman, María Dolores Lozano Suárez, Mónica Inés Schulmaister, Ivonne Twigg Sandoval Cáceres, Emanuel Jinich Charney, Mercedes Cortés Lascurain
D. R. © 2014 por **EDITORIAL SANTILLANA, S.A. de C.V.**
Avenida Río Mixcoac núm. 274 piso 4, colonia Acacias, delegación Benito Juárez, C.P. 03240, Ciudad de México.

ISBN: 978-607-01-2260-6

Primera edición: abril de 2014

Segunda reimpresión: abril de 2016

Miembro de la Cámara Nacional de la Industria Editorial Mexicana.

Reg. Núm. 802

Impreso en México/Printed in Mexico

Palabras al alumno

Una actitud positiva hacia el estudio de las matemáticas te permitirá enfrentar situaciones diversas de forma eficiente.



El libro que tienes en tus manos tiene el propósito de acompañarte en tu curso de Matemáticas, del tercer grado de secundaria. Esta obra ha sido escrita con la intención de acercarte a las matemáticas mediante el desarrollo de actividades interesantes y de problemas y situaciones cercanos a tu vida cotidiana, de manera que el aprendizaje te resulte entretenido y lleno de significado.

Las matemáticas constituyen una forma de pensar y de abordar problemas; entenderlas es fundamental y, por ello, tratamos de ofrecerte muchas opciones para que argumentes, comuniques tus ideas, elabores razonamientos y emplees herramientas matemáticas. Todo ello te dará ocasión para profundizar sobre la manera de pensar en matemáticas y así comprender mejor los conceptos relacionados con la situación o problema que estás trabajando.

Resolver problemas requiere dedicación y esfuerzo, por lo que te sugerimos que lleves a cabo un acercamiento con tus compañeros de clase y tu profesor, que incluya momentos de discusión y reflexión tanto individual como grupal en cada uno de los retos planteados. Es importante que aproveches lo que ya conoces, que reflexiones si es útil en esa situación o no lo es, y cuál es la mejor manera de resolverla. Al discutir con tus compañeros y con tu profesor tendrás nuevas oportunidades de reflexionar sobre diferentes maneras de abordar y resolver los problemas, compararlas y tomar decisiones acerca de las ventajas y desventajas de cada una de ellas, cómo se complementan, etc. Así lograrás profundizar en las ideas y los conceptos matemáticos que se requieren en la solución de los problemas y sobre el papel que tienen las matemáticas en la sociedad.

Es importante que te preguntes constantemente si tus argumentos son sólidos, si comprendes los proporcionados por otros compañeros o por el profesor, y que trates de resolver por ti mismo otros problemas similares, de manera que puedas percartarte de la posibilidad de utilizar tu propio conocimiento y plantear las dudas que aún tienes y discutirlos de nuevo con el profesor.

Hemos disfrutado mucho el hecho de escribir este libro y esperamos que tú también goces al utilizarlo y que adquieras sólidos conocimientos matemáticos para que en el futuro puedas ponerlos en práctica en una variedad de contextos.

Los autores

© SANTILLANA

Palabras al docente

El estudio de las matemáticas busca que los jóvenes desarrollen una manera de pensar que les permita expresar, por medio de las herramientas adquiridas, situaciones que se les presenten en diversos entornos, que puedan comprender las explicaciones y los razonamientos de otros, y que sean capaces de utilizar técnicas matemáticas adecuadas para reconocer, plantear y resolver problemas. Por ello, el tratamiento de los contenidos en este libro se realiza mediante secuencias de situaciones problemáticas conformadas por cuatro etapas: inicio, planeación, desarrollo y cierre.

En cada secuencia se propone a los estudiantes la elaboración, en equipos o todo el grupo, de un producto: construir una maqueta, elaborar un informe, realizar una investigación, explicar y justificar razonamientos y estrategias empleadas para resolver un problema, entre otros.

En la primera etapa se presenta una situación —una actividad, un juego, una imagen o un texto— cuyo propósito es despertar el interés de los alumnos e invitarlos a reflexionar y encontrar diferentes formas de resolverla. El inicio se complementa con el planteamiento de algunas preguntas para recuperar conocimientos, para meditar sobre la solución del problema y considerar los contenidos por estudiar. Este momento de la secuencia puede trabajarse en equipos o en grupo, usted puede decidir la mejor manera de trabajo de acuerdo con su plan de clases.

En la etapa de planeación, que en el libro se titula “Nuestro trabajo”, se propone el producto que elaborarán los estudiantes, así como su propósito, los recursos y la organización de las actividades que deberán realizar. Durante el desarrollo de la secuencia se proponen actividades diversas, individuales y colectivas, que permitirán a los estudiantes ir de lo informal a lo convencional en la construcción de reglas, fórmulas, algoritmos, definiciones, etc. Es pertinente intervenir lo menos posible en las discusiones de los alumnos para que sean ellos quienes formulen y validen conjeturas y utilicen procedimientos propios al resolver los problemas.

Con el propósito de que el estudiante evalúe su avance individual y colectivo en la construcción del conocimiento, en su producto y en el desarrollo de habilidades y actitudes, se presenta el apartado “¿Cómo vamos?”, en el que se propicia la reflexión metacognitiva. Es posible complementar esta sección con otras preguntas como las siguientes: *¿Puedes seguir esta secuencia de argumentos o elaborarlos tú mismo? ¿Comprendiste los razonamientos y las explicaciones de tus compañeros?,* etcétera.

El cierre de la secuencia se realiza en dos momentos: primero, en “Presentación de nuestro trabajo”, los alumnos finalizan la confección del producto; se sugiere que lo socialicen con el grupo, incluso con la escuela o la comunidad. De esta manera también comunican, argumentan y comparten los conocimientos. Por último, en el segundo momento, “¿Cómo nos fue?”, discuten en grupo varios puntos relacionados con los aprendizajes logrados, el producto, la manera en la que aprendieron y la resolución del problema inicial.

Quienes participamos en su elaboración, esperamos que esta obra sea de utilidad para su trabajo docente.

Los autores

© SANTILLANA

Índice

Presentación	3
Palabras al alumno	4
Palabras al docente	5
Dosificación	8
Tu libro, de principio a fin	12



1. Ecuaciones no lineales	18
2. Figuras semejantes	24
3. Criterios de congruencia y semejanza de triángulos	32
4. Representaciones de proporcionalidad	42
5. Tablas y expresiones algebraicas de variación cuadrática	50
6. Características de los eventos de un experimento aleatorio	58
7. Estudio estadístico	64
Evaluación tipo PISA	70



8. Factorización	74
9. Rotación y traslación de figuras	82
10. Diseños con transformaciones geométricas	88
11. El teorema de Pitágoras	94
12. Explicitación y uso del teorema de Pitágoras	98
13. Eventos complementarios y mutuamente excluyentes	106

Evaluación tipo PISA 112



14. La fórmula general	116
15. Cálculo de distancias y alturas inaccesibles	124

© SANTILLANA

16. El teorema de Tales y sus aplicaciones	130
17. Semejanza y figuras homotéticas	138
18. Gráficas de funciones cuadráticas	146
19. Gráficas con secciones de curvas y rectas	154
20. Probabilidad de eventos independientes	160

Evaluación tipo PISA 166



21. Sucesiones numéricas y figurativas	170
22. Cilindros, conos y esferas	176
23. Pendiente y ángulo de inclinación de una recta	184
24. Relación entre ángulos y lados de triángulos rectángulos	192
25. Razones trigonométricas	200
26. Razón de cambio	206
27. Desviación media	216

Evaluación tipo PISA 222



28. Ecuaciones	226
29. Cortes de un cilindro y un cono	232
30. Volumen de cilindros y conos	236
31. Cálculo de volúmenes	242
32. Variación lineal o cuadrática	248
33. Juegos de azar	260

Evaluación tipo PISA 268

Fuentes de información	
Para el estudiante	270
Para el profesor	271
Bibliografía consultada	272

Dosificación

Eje	Tema	Secuencia	Contenidos	Págs.	Semana	Calendarización
Bloque 1						
Sentido numérico y pensamiento algebraico	Patrones y ecuaciones	1. <i>Ecuaciones no lineales</i>	Resolución de problemas que impliquen el uso de ecuaciones cuadráticas sencillas, utilizando procedimientos personales u operaciones inversas.	18 a 23	1	
Forma, espacio y medida	Figuras y cuerpos	2. <i>Figuras semejantes</i>	Construcción de figuras congruentes o semejantes (triángulos, cuadrados y rectángulos) y análisis de sus propiedades.	24 a 31	2	
		3. <i>Criterios de congruencia y semejanza de triángulos</i>	Explicitación de los criterios de congruencia y semejanza de triángulos a partir de construcciones con información determinada.	32 a 41	3 y 4	
Manejo de la información	Proporcionalidad y funciones	4. <i>Representaciones de proporcionalidad</i>	Análisis de representaciones (gráficas, tabulares y algebraicas) que corresponden a una misma situación. Identificación de las que corresponden a una relación de proporcionalidad.	42 a 49	5	
		5. <i>Tablas y expresiones algebraicas de variación cuadrática</i>	Representación tabular y algebraica de relaciones de variación cuadrática, identificadas en diferentes situaciones y fenómenos de la física, la biología, la economía y otras disciplinas.	50 a 57	6	
	Nociones de probabilidad	6. <i>Características de los eventos de un experimento aleatorio</i>	Conocimiento de la escala de la probabilidad. Análisis de las características de eventos complementarios y eventos mutuamente excluyentes e independientes.	58 a 63	7	
	Análisis y representación de datos	7. <i>Estudio estadístico</i>	Diseño de una encuesta o un experimento e identificación de la población en estudio. Discusión sobre las formas de elegir el muestreo. Obtención de datos de una muestra y búsqueda de herramientas convenientes para su presentación.	64 a 69	8	
Bloque 2						
Sentido numérico y pensamiento algebraico	Patrones y ecuaciones	8. <i>Factorización</i>	Uso de ecuaciones cuadráticas para modelar situaciones y resolverlas usando la factorización.	74 a 81	9	
Forma, espacio y medida	Figuras y cuerpos	9. <i>Rotación y traslación de figuras</i>	Análisis de las propiedades de la rotación y de la traslación de figuras.	82 a 87	10	
		10. <i>Diseños con transformaciones geométricas</i>	Construcción de diseños que combinan la simetría axial y central, la rotación y la traslación de figuras.	88 a 93	11	
	Medida	11. <i>El teorema de Pitágoras</i>	Análisis de las relaciones entre las áreas de los cuadrados que se construyen sobre los lados de un triángulo rectángulo.	94 a 97	12	
		12. <i>Explicitación y uso del teorema de Pitágoras</i>	Explicitación y uso del teorema de Pitágoras.	98 a 105	13 y 14	
Manejo de la información	Nociones de probabilidad	13. <i>Eventos complementarios y mutuamente excluyentes</i>	Cálculo de la probabilidad de ocurrencia de dos eventos mutuamente excluyentes y de eventos complementarios (regla de la suma).	106 a 111	15	
Bloque 3						
Sentido numérico y pensamiento algebraico	Patrones y ecuaciones	14. <i>La fórmula general</i>	Resolución de problemas que impliquen el uso de ecuaciones cuadráticas. Aplicación de la fórmula general para resolver dichas ecuaciones.	116 a 123	16	
Forma, espacio y medida	Figuras y cuerpos	15. <i>Cálculo de distancias y alturas inaccesibles</i>	Aplicación de los criterios de congruencia y semejanza de triángulos en la resolución de problemas.	124 a 129	17	
		16. <i>El teorema de Tales y sus aplicaciones</i>	Resolución de problemas geométricos mediante el teorema de Tales.	130 a 137	18	
		17. <i>Semejanza y figuras homotéticas</i>	Aplicación de la semejanza en la construcción de figuras homotéticas.	138 a 145	19 y 20	
Manejo de la información	Proporcionalidad y funciones	18. <i>Gráficas de funciones cuadráticas</i>	Lectura y construcción de gráficas de funciones cuadráticas para modelar diversas situaciones o fenómenos.	146 a 153	21	
		19. <i>Gráficas con secciones de curvas y rectas</i>	Lectura y construcción de gráficas formadas por secciones rectas y curvas que modelan situaciones de movimiento, llenado de recipientes, etcétera.	154 a 159	22	
	Nociones de probabilidad	20. <i>Probabilidad de eventos independientes</i>	Cálculo de la probabilidad de ocurrencia de dos eventos independientes (regla del producto).	160 a 165	23	

Eje	Tema	Secuencia	Contenidos	Págs.	Semana	Calendarización
Bloque 4						
Sentido numérico y pensamiento algebraico	Patrones y ecuaciones	21. <i>Sucesiones numéricas y figurativas</i>	Obtención de una expresión general cuadrática para definir el enésimo término de una sucesión.	170 a 175	24	
Forma, espacio y medida	Figuras y cuerpos	22. <i>Cilindros, conos y esferas</i>	Análisis de las características de los cuerpos que se generan al girar sobre un eje, un triángulo rectángulo, un semicírculo y un rectángulo. Construcción de desarrollos planos de conos y cilindros rectos.	176 a 183	25 y 26	
	Medida	23. <i>Pendiente y ángulo de inclinación de una recta</i>	Análisis de las relaciones entre el valor de la pendiente de una recta, el valor del ángulo que se forma con la abscisa y el cociente del cateto opuesto sobre el cateto adyacente.	184 a 191	27 y 28	
		24. <i>Relación entre ángulos y lados de triángulos rectángulos</i>	Análisis de las relaciones entre los ángulos agudos y los cocientes entre los lados de un triángulo rectángulo.	192 a 199	29	
		25. <i>Razones trigonométricas</i>	Explicitación y uso de las razones trigonométricas seno, coseno y tangente.	200 a 205	30	
Manejo de la información	Proporcionalidad y funciones	26. <i>Razón de cambio</i>	Cálculo y análisis de la razón de cambio de un proceso o fenómeno que se modela con una función lineal. Identificación de la relación entre dicha razón y la inclinación o pendiente de la recta que la representa.	206 a 215	31 y 32	
	Análisis y representación de datos	27. <i>Desviación media</i>	Medición de la dispersión de un conjunto de datos mediante el promedio de las distancias de cada dato a la media (desviación media). Análisis de las diferencias de la "desviación media" con el "rango" como medidas de la dispersión.	216 a 221	33	
Bloque 5						
Sentido numérico y pensamiento algebraico	Patrones y ecuaciones	28. <i>Ecuaciones</i>	Resolución de problemas que implican el uso de ecuaciones lineales, cuadráticas o sistemas de ecuaciones. Formulación de problemas a partir de una ecuación dada.	226 a 231	34	
Forma, espacio y medida	Medida	29. <i>Cortes de un cilindro y un cono</i>	Análisis de las secciones que se obtienen al realizar cortes a un cilindro o a un cono recto. Cálculo de las medidas de los radios de los círculos que se obtienen al hacer cortes paralelos en un cono recto.	232 a 235	35	
		30. <i>Volumen de cilindros y conos</i>	Construcción de las fórmulas para calcular el volumen de cilindros y conos, tomando como referencia las fórmulas de prismas y pirámides.	236 a 241	36	
		31. <i>Cálculo de volúmenes</i>	Estimación y cálculo del volumen de cilindros y conos o de cualquiera de las variables implicadas en las fórmulas.	242 a 247	37	
Manejo de la información	Proporcionalidad y funciones	32. <i>Variación lineal o cuadrática</i>	Análisis de situaciones problemáticas asociadas a fenómenos de la física, la biología, la economía y otras disciplinas, en las que existe variación lineal o cuadrática entre dos conjuntos de cantidades.	248 a 259	38 y 39	
	Nociones de probabilidad	33. <i>Juegos de azar</i>	Análisis de las condiciones necesarias para que un juego de azar sea justo, con base en la noción de resultados equiprobables y no equiprobables.	260 a 267	40	

Tu libro, de principio a fin

Entrada de bloque

Estas páginas se ilustran con una imagen y un texto breve que describe la relación que esta guarda con alguno de los contenidos que trabajarás en el bloque. Aquí encontrarás los aprendizajes esperados, que exponen los conocimientos que desarrollarás al realizar las actividades que se proponen en los temas.

Bloque 5



Como resultado del estudio de este bloque temático se espera que:

- Resuelvas y plantees problemas que involucren ecuaciones lineales, sistemas de ecuaciones y ecuaciones de segundo grado.
- Resuelvas problemas que impliquen calcular el volumen de cilindros y conos o cualquiera de las variables que intervienen en las fórmulas que se utilicen. Adecues como cambia el volumen al aumentar o disminuir alguna de las dimensiones.
- Leas y representes, gráfica y algebraicamente, relaciones lineales y cuadráticas.
- Resuelvas problemas que impliquen calcular la probabilidad de eventos complementarios, mutuamente excluyentes e independientes.

Cúpulas cónicas, Alberobello, Italia
En la región de Puglia, en Italia, se localiza el pueblo de Alberobello, famoso por sus casas con techos con punta cónica, de hecho cónicas. Formadas desde los más antiguos días del siglo III. Este tipo de techos fueron patrimonio de la humanidad por la Unesco en 1998.

Te invitamos a que, después de trabajar cada bloque, regreses a estas páginas:

- observa la imagen y encuentra la relación que tiene con los contenidos del bloque.
- haz una nueva lectura de los aprendizajes esperados y, con tus compañeros y profesor, evalúa los logros obtenidos.

Los temas que estudiarás en cada secuencia se desarrollan en cuatro etapas:

Inicio

Al inicio encontrarás una situación, ya sea un problema, un juego o una actividad, que deberás analizar a fin de proponer diversas estrategias de solución. La situación inicial se complementa con preguntas que te harán reflexionar sobre lo que ya sabes y sobre las estrategias que puedes definir o aplicar; al mismo tiempo, los cuestionamientos planteados te introducirán en los contenidos que estudiarás en la secuencia.

9 Rotación y traslación de figuras

Contenido
Medida de la probabilidad de la ocurrencia de la rotación de figuras.

Los mosaicos
Los mosaicos son conjuntos de figuras que se repiten para cubrir un espacio sin dejar huecos ni solapamientos. Los mosaicos pueden ser de diferentes tipos: regulares, semiregulares, irregulares, etc.

Nuestro trabajo
En esta etapa, deberás analizar y resolver el problema planteado. Debes leer el enunciado del problema con atención y buscar la información necesaria para resolverlo. Puedes utilizar los conocimientos que ya tienes sobre rotación y traslación de figuras.

Planeación

Nuestro trabajo. En este apartado encontrarás recomendaciones específicas para hacer un determinado producto a lo largo del desarrollo de los temas. También hallarás sugerencias de las formas en que puedes organizarte — individualmente, en parejas, en equipo o en grupo — e indicaciones del material que necesitarás para llevar a cabo el producto.

Presentación de nuestro trabajo
Resuelve con tu equipo. Expone tu trabajo a los demás compañeros del salón.

¿Cómo nos fue?

- ¿Cuáles estrategias fueron más efectivas en el desarrollo de tu trabajo?
- ¿Fue fácil o difícil explicar tu trabajo a los demás?
- ¿Fue fácil o difícil trabajar en equipo?
- ¿Fue fácil o difícil explicar tu trabajo a los demás?
- ¿Fue fácil o difícil explicar tu trabajo a los demás?
- ¿Fue fácil o difícil explicar tu trabajo a los demás?

Desarrollo

Durante esta etapa, realizarás actividades individuales y colectivas que te ayudarán a adquirir nuevos conocimientos y a desarrollar tus competencias matemáticas.

Aplicaciones del teorema de Pitágoras
Resuelve con un compañero, lee la información y resuelve los problemas.

Problema 1
Para construir un jardín rectangular se necesita un cuadrado de 100 metros de lado. Si se quiere que el jardín sea rectangular, ¿cuánto debe ser el largo y el ancho del jardín? ¿Cuánto debe ser el área del jardín?

Problema 2
Un campo rectangular tiene un área de 200 metros cuadrados. Si el largo es 20 metros más que el ancho, ¿cuánto mide el largo y el ancho del campo?

Problema 3
Un triángulo rectángulo tiene un hipotenusa de 10 metros. Si el ángulo agudo mide 30 grados, ¿cuánto mide el cateto adyacente y el cateto opuesto?

Cierre

En esta última etapa presentarás a tus compañeros y profesor el resultado de tu producto mediante una exposición en el salón, un periódico mural, un dibujo o una construcción geométrica, entre otros.

Seguir las instrucciones del profesor y formar un equipo. Intercambiar sus métodos y registrar en la tabla los resultados de cada compañero. ¿Qué resultados encuentran? Comparar sus resultados y elaborar una lista que indique los errores cometidos en el equipo.

En muchos casos la información y comprensión con un compañero ayuda. Discutan en qué se parecen y en qué difieren. Comparta de su profesor, registrando su propia lista de los errores matemáticos cometidos.

Temas de vida: Si dice o hace cosas parecidas con palabras con otro tema, véngasle. En cada día de la semana escriban una lista de cosas que han aprendido o que le han enseñado de los temas de la semana. En la lista de los temas de la semana, escriban una lista de cosas que han aprendido o que le han enseñado de los temas de la semana. En la lista de los temas de la semana, escriban una lista de cosas que han aprendido o que le han enseñado de los temas de la semana.

Historias de vida

Todo empezó en la ciudad de Mérida con la familia García. Eran una familia numerosa y vivían en un barrio de la ciudad. Eran una familia numerosa y vivían en un barrio de la ciudad. Eran una familia numerosa y vivían en un barrio de la ciudad.

¿Cómo vamos?

Revisen en sus equipos para hacer su juego de mesa.

Historias de vida
Estos recuadros contienen relatos sobre personas y acontecimientos o referencias históricas asociados con el contenido de las actividades.

¿Cómo vamos?
En diferentes momentos del desarrollo de los temas encontrarás este apartado, que te permitirá hacer un alto en el camino y evaluar tus avances acerca de lo que has aprendido y del desarrollo del producto.

Espacio tecnológico

Imagina un dibujo de 200 estampas adhesivas. El número de estampas que hacen cada página es el mismo que el número de páginas.

Presentación de nuestro trabajo

Cada equipo presenta al grupo su proyecto antes de entregarlo al maestro.

¿Cómo nos fue?

Espacio tecnológico
En este apartado te recomendamos actividades complementarias a las que realizas en el libro. Dichas actividades se basan en el uso de recursos tecnológicos: Internet, calculadora, programa de geometría dinámica, entre otros.

Cortes en un cilindro

Para esta actividad con un compañero. Con plastilina, construye dos cilindros que midan alrededor de 10 cm de altura y 5 cm de diámetro y luego los plegues.

Cortes en un cono

Hagan esta actividad en equipos. Con plastilina, construyan cuatro conos con una altura aproximada de 8 cm y cuya base mida 2 cm de radio.

¿Cómo vamos?

Revisen con su compañero de equipo para trabajar en su proyecto.

Glosario

Te ofrece la definición de palabras o expresiones importantes, relacionadas con el tema que se aborda en la secuencia.

Presentación de nuestro trabajo
En este apartado encontrarás recomendaciones para compartir los resultados de tu trabajo. Y para que puedas evaluar lo que aprendiste, el resultado de tu producto, las dificultades a las que te enfrentaste y la forma en que las resolviste, tanto en lo individual como en lo colectivo, el apartado "¿Cómo nos fue?" te ofrece una útil guía.

¿Cómo nos fue?

Resuelve en tu cuaderno los siguientes problemas.

1. El rectángulo de la derecha tiene las medidas que se indican.

2. En un triángulo rectángulo, la hipotenusa mide 10 cm y uno de los catetos mide 6 cm. ¿Cuál es el otro cateto?

3. Resuelve las siguientes ecuaciones con factorización para encontrar el valor de la variable y que las satisficiera. Simplifica cuando sea posible.

Presentación de nuestro trabajo

Presenten su cartel a sus compañeros y comparen las aplicaciones que cada uno dio para verificar que sean correctas.

¿Cómo nos fue?

Tareas
En este apartado te proponemos diferentes actividades para que ejercites tus habilidades, desarrolles nuevas estrategias y refuerces los procedimientos de resolución de problemas que trabajaste en la secuencia.

¿Cómo nos fue?
En esta sección, al final de cada lección, se plantean preguntas para reflexionar acerca de los temas cubiertos para que confirmes la adquisición de los conocimientos descritos en el contenido de la lección y pongas en práctica los aprendizajes esperados.

Evaluación tipo PISA
En esta sección al final de cada bloque, encontrarás una evaluación escrita que fue diseñada con el modelo PISA (Programa Internacional de Evaluación de Estudiantes). Aquí se plantean situaciones en contextos muy cercanos a tu vida cotidiana para que puedas poner en práctica tus conocimientos, habilidades y actitudes.

Evaluación tipo PISA

UNIDAD: El despeje

Una fórmula asociada con la caída libre es la altura h que alcanza un objeto t segundos después de haber sido lanzado hacia arriba con una velocidad inicial de v_0 metros por segundo. La altura aproximada se relaciona con la fórmula $h = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$, donde $g = 9.8 \text{ m/s}^2$.

Considera que un futbolista patea un balón que está detenido en el campo de juego y este sale con una velocidad de 19.6 m/s.

Pregunta 1: EL DESPEJE Contexto: Científico. Aprendizaje esperado: Resolver problemas que impliquen el uso de ecuaciones de segundo grado.

¿Qué altura alcanza el balón un segundo después de haber sido pateado?

a) 19.6 m b) 14.7 m c) 9.8 m d) 4.9 m

Pregunta 2: EL DESPEJE Contexto: Científico. Aprendizaje esperado: Resolver problemas que impliquen el uso de ecuaciones de segundo grado.

Cuando $t = 0$, ¿A qué altura es igual a cero? ¿Qué significa la anterior?

Respuesta: _____

Pregunta 3: EL DESPEJE Contexto: Científico. Aprendizaje esperado: Resolver problemas que impliquen el uso de ecuaciones de segundo grado.

¿Cuánto tiempo tarda un balón en caer nuevamente al suelo? Escribe todas las operaciones que realizaste.

Respuesta: _____

Pregunta 4: EL DESPEJE Contexto: Científico. Aprendizaje esperado: Resolver problemas que impliquen el uso de ecuaciones de segundo grado.

¿Cuánto tiempo transcurre desde que el futbolista despeja el balón hasta que este alcanza una altura de 18.375 m?

Respuesta: _____

UNIDAD: El recorrido

José maneja un tráiler y hace recorridos entre dos ciudades llevando carga. La última entrega la hizo de la ciudad A a la ciudad B. En un día, llevó una carga a la ciudad E, y quiere saber la distancia que recorrió. La imagen ilustra la distancia entre las ciudades.

Pregunta 1: EL RECORRIDO Contexto: Laboral. Aprendizaje esperado: Resolver problemas de congruencia y semejanzas que impliquen utilizar estas propiedades en triángulos o en cuadriláteros.

¿Qué distancia recorrió José de la ciudad B a la E? Justifica tu respuesta.

Pregunta 2: EL RECORRIDO Contexto: Laboral. Aprendizaje esperado: Resolver problemas de congruencia y semejanzas que impliquen utilizar estas propiedades en triángulos o en cuadriláteros.

Analiza el procedimiento que siguió Jacobo para calcular la distancia BE.

Para responder la pregunta anterior, Jacobo propuso el siguiente procedimiento:

Dado que los triángulos son semejantes:

1. Establece la relación entre los lados para encontrar el valor de x .

$$\frac{x}{211} = \frac{119}{418}$$

2. Obtiene el valor de x .

3. Suma el valor de los segmentos BC y CE para obtener el valor de BE.

¿El procedimiento de Jacobo es correcto? Escribe tus operaciones y justifica tu respuesta.

Bloque 1

Como resultado del estudio de este bloque temático se espera que:

- Expliques la diferencia entre eventos complementarios, mutuamente excluyentes e independientes.

© SANTILLANA

© SANTILLANA

Cajas cuadradas

Estas cajas representan un ejemplo de figuras semejantes. Debido a esta característica las cajas pueden guardarse una dentro de otra, lo que permite economizar espacio cuando no se usan.

Contenido

Resolución de problemas que impliquen el uso de ecuaciones cuadráticas sencillas, utilizando procedimientos personales u operaciones inversas.

El huerto de la señora Hernández

Reúnete con un compañero, lean la situación que se plantea y respondan en su cuaderno. Justifiquen sus respuestas.

La señora Hernández decidió hacer un huerto rectangular en su jardín y, aprovechando los 50 m que tiene de malla de gallinero, quiere cercarlo. Quiere que el huerto tenga un área de 144 m^2 para poder plantar sus hortalizas, pero necesita saber cuáles deben ser las dimensiones del rectángulo, es decir, su largo y su ancho de tal manera que satisfagan ambas condiciones. Ayúdenle a resolver el problema.

- Si llamamos x al largo del rectángulo y y al ancho, ¿qué expresiones algebraicas permiten representar el perímetro y el área del huerto?
- En la expresión para el perímetro, escriban el valor de y en términos de x .
- Si sustituyen la expresión anterior, ¿cuál es la expresión para el área del huerto?
- Utilicen lo que saben para obtener una ecuación. ¿Cuál es la incógnita de la ecuación?
- ¿Qué diferencia hay entre la ecuación que encontraron y las ecuaciones con las que trabajaron en grados anteriores?
- Utilizando la factorización, ¿es posible escribir la ecuación que encontraron como $(x - 9)(x - 16) = 0$?
- ¿Qué se puede decir de los factores de un producto si se sabe que este es cero?
- ¿Cuánto deben medir el largo y el ancho del huerto de la señora Hernández?

Comparen sus respuestas con las de otras parejas. En grupo comenten las diferencias entre las ecuaciones $0 = -2x + 50$ y $(x - 9)(x - 16) = 0$. Anoten sus acuerdos en su cuaderno.

A lo largo de las actividades, encontrarán formas de resolver ecuaciones como la anterior. Antes, lean la información del proyecto que realizarán durante la secuencia.

Nuestro trabajo

En equipo de tres integrantes diseñarán y armarán tres cajas, sin tapa.

- Las cajas serán elaboradas con cartón o cartulina pintadas de distinto color.
- Deberán indicar la medida de ancho, largo, altura, área de la base y volumen.
- Decidirán para qué podrían utilizarse según sus dimensiones, por ejemplo, para lápices en el escritorio, pañuelos desechables, cuadernos, etcétera.
- Al terminarlas, realizarán una exposición dentro del salón de clases.

Más adelante encontrarán indicaciones adicionales para elaborar su proyecto.

Ecuaciones de segundo grado

Antes de trabajar en las cajas, realiza con un compañero las actividades:

- Representen los enunciados mediante una ecuación e identifiquen el valor de la incógnita.
 - El número x tiene la propiedad de que el producto del número que le precede y el número que le sigue, es igual a 24. _____ $x =$ _____
 - Si al cuadrado de un número x se le resta el mismo número se obtiene 12. _____ $x =$ _____
 - El doble del área de un cuadrado de lado x es igual a 32. _____ $x =$ _____
- ¿En qué se diferencian estas ecuaciones de las que han resuelto anteriormente? _____
- Si consideramos que y representa un número desconocido, planteen una situación similar a las anteriores, para cada una de las ecuaciones.
 - $y^2 + 5 = 6y$: _____
 - $(y - 5)(y - 4) = 3y$: _____
 - $2y^3 - 9y^2 = 2y - 9$: _____
- Si saben que el área de un cuadrado es de 36 cm^2 , escriban una ecuación que represente esta situación y utilícenla para encontrar la información.
 - ¿Cuánto vale cada uno de sus lados? _____
 - ¿Cuántas soluciones tiene la ecuación? _____
 - ¿Todas esas soluciones son útiles en el problema planteado? Justifiquen su respuesta. _____
- Escriban una ecuación que represente la situación: si a un número n lo elevamos al cuadrado y le restamos 25, el resultado es cero. _____
 - ¿Cuáles números satisfacen la condición dada? _____
- ¿Qué semejanzas y diferencias encuentran entre los dos últimos problemas planteados? _____
- ¿Cuántas raíces cuadradas tiene un número positivo? _____
 - ¿Cuáles son? _____

Comenten sus respuestas con sus compañeros y válidenlas con el profesor.

En distintos contextos

Resuelve individualmente las actividades. Escribe una ecuación que represente cada situación y encuentra la o las soluciones.

- El producto de un número por otro, que es 10 unidades menor, es -24 : _____
Solución o soluciones: _____
- El cuadrado de la edad de Jorge más uno, es igual a 10. _____
 - ¿Cuáles son las soluciones? _____
 - ¿Todas las soluciones de la ecuación son soluciones del problema? ¿Por qué? _____
 - ¿Cuál es la edad de Jorge? _____
- Describe en tu cuaderno el procedimiento que seguiste para encontrar las respuestas.

Discute con el grupo y con tu profesor tus resultados y tu procedimiento. Elijan el procedimiento más eficiente para resolver este tipo de problemas.

Cuando elevamos un número al cuadrado, el resultado siempre es un número positivo, independientemente de su signo. De este modo si tenemos dos números simétricos (7 y -7 , por ejemplo), al elevarlos al cuadrado obtenemos el mismo resultado (49). Es por eso que una **ecuación donde la variable está elevada al cuadrado puede tener dos soluciones**, una negativa y una positiva.

Es importante analizar cada solución para saber si tiene sentido en el contexto del problema. Por ejemplo, si se habla de edades o distancias, no puede considerarse como posible solución un número negativo.

Tareas

Resuelve en tu cuaderno, utiliza una ecuación para representar cada situación.

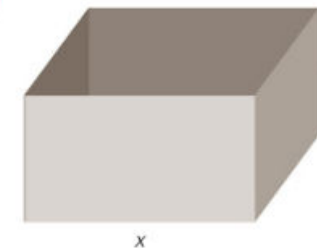
1. La suma de los cuadrados de dos números enteros consecutivos es 85. ¿Qué parejas de números satisfacen la situación? _____
2. El área de un rectángulo mide 84 cm^2 . Si la base es 5 cm mayor que la altura, ¿cuáles son las dimensiones del rectángulo? _____
3. El cuadrado de un número más 8 es igual a 129. ¿De qué número se trata? _____
4. Calcula la medida de la base y de la altura de un triángulo, cuya base mide 3 cm menos que la altura y tiene un área de 35 cm^2 . _____
5. Si a un número le sumas 3 y lo elevas al cuadrado el resultado es 9. ¿Qué número es? ¿Puede ser otro número? _____
6. Si x son los meses que han transcurrido desde que se lanzó un producto al mercado y la cantidad de municipios que lo conocen se define como $x^2 + 3$, ¿cuántos meses han pasado cuando el producto es conocido en 39 municipios? _____

© SANTILLANA

¿Cómo vamos?

Reúnete con tu equipo para trabajar en la elaboración de sus cajas.

- Para diseñar las cajas, consideren que la base de cada caja será cuadrada y que su lado está dado por x y su altura es a . Como el modelo que se muestra:
- Encuentren una expresión algebraica que les permita calcular la cantidad de cartón que necesitan para cada caja.
- Discutan cómo calcularían la cantidad de cartón que deben emplear en cada caja.
- Las cajas deberán cumplir con los siguientes requisitos:
 - Una tendrá altura de 15 cm y necesitan 700 cm^2 de cartón para hacerla.
 - Otra tendrá una altura de 15 cm y requieren 350 cm^2 de material.
 - La tercera tendrá una altura de 4 cm y necesitan 32 cm^2 de cartón.
- Escriban una ecuación que represente cada caso, encuentren la o las soluciones y determinen las medidas de la base.
- Anoten en el cuaderno el método que utilizaron para calcular el lado de la base (x).
- ¿Cuál es el volumen de cada caja?
- Tracen los planos correspondientes a cada caja, recórtenlos, armen sus cajas y decórenlas para la presentación. Decidan qué uso les darán.



Soluciones de ecuaciones

Analicen en pareja las expresiones algebraicas y resuelvan.

- $x^2 - x = -2$
- $6x^2 = 864$
- $z(z + 6) = 16$

- ¿Las expresiones dadas son ecuaciones? ¿Por qué? _____

- ¿Cuántas incógnitas tiene cada una? ¿Cuáles son? _____

- ¿Cuántas soluciones pueden tener esas ecuaciones? ¿Por qué? _____

- Planteen en su cuaderno una situación que se represente con cada una de las expresiones anteriores y encuentren la o las soluciones de estas.
- Utilicen dos métodos: una estrategia ideada por ustedes y un método de solución que conozcan.
- Expliquen su estrategia. Una vez que encuentren las soluciones, sustitúyanlas en las ecuaciones para verificar que son correctas.

Comparen sus procedimientos y resultados con otros compañeros. Comenten los métodos que emplearon y válidenlos con el profesor.

© SANTILLANA

Las ecuaciones pueden clasificarse según los exponentes de sus variables. Si el mayor exponente al que está elevada la variable es dos, se trata de una ecuación de **segundo grado**, a la que también se le llama **ecuación cuadrática**.

En general las ecuaciones cuadráticas tienen dos soluciones distintas, pero en ocasiones, solamente tienen una solución. Por ejemplo, la ecuación $(x - 4)^2 = 0$ tiene como única solución $x = 4$. En esos casos se considera que la ecuación tiene dos soluciones pero que consisten en el mismo número, se dice que la solución tiene **multiplicidad 2**.

Reúnete con un compañero, lean nuevamente la información del problema de la actividad inicial y resuelvan la actividad.

- ¿Cuántas soluciones tenía la ecuación: $x^2 - 25x + 144 = 0$? Argumenten su respuesta.

- Si la señora Hernández quisiera que el área del huerto fuera de 150 m^2 , conservando el mismo perímetro, ¿cuál sería la ecuación? _____
- Encuentren un método de solución de la ecuación y resuélvanla.
 - ¿Cuántas soluciones encontraron? ¿Todas son soluciones posibles del problema? Argumenten su respuesta. _____
 - ¿Cuáles serían ahora las dimensiones del huerto? _____
- La señora Hernández decidió cercar un nuevo huerto con 80 m de malla de gallinero, pero duda, entre tres superficies disponibles, cuál elegir: una de 144 m^2 , otra de 396 m^2 o una tercera de 400 m^2 .
 - Escriban una ecuación para el terreno de 144 m^2 y usen su método de solución para resolver la ecuación. _____
 - ¿Cuántas soluciones encontraron para el área de 144 m^2 ? ¿Todas ellas son soluciones posibles del problema? Argumenten su respuesta. _____
- Usen su método de solución para resolver en su cuaderno la ecuación para el terreno de 396 m^2 .
 - ¿Cuántas soluciones encontraron? ¿Todas ellas son soluciones posibles del problema? Argumenten su respuesta.
- Usen su método de solución para resolver en su cuaderno la ecuación para el terreno de área 400 m^2 .
 - ¿Cuántas soluciones encontraron? ¿Todas ellas son soluciones posibles del problema? Argumenten su respuesta.
- ¿Cuál de los terrenos le recomendarían usar y por qué? _____
- ¿Cuál es la diferencia entre las ecuaciones de esta actividad y las ecuaciones lineales que han resuelto en sus cursos anteriores? _____

Comparen sus métodos de solución y sus respuestas con las de otros equipos. Si tienen dudas, coméntenlas con el profesor.

Tareas

Resuelve las actividades.

- Encuentra las soluciones de las ecuaciones.
 - $\frac{(x^2 - 9)}{10} = 4$
 - $x^2 - 3x = -2$
- Un ingeniero agrónomo asegura a un hortelano que obtendría mayor rendimiento de un pequeño huerto de manzanas si añadiera 40 árboles a los que hay actualmente. Ha calculado que si planta x árboles, la producción de toneladas de manzanas se puede obtener con la ecuación: $R = -\left(\frac{1}{2}\right)x^2 + 5x + 1000$.
 - ¿Cuántos árboles más debe sembrar para obtener 1012 toneladas de manzanas? Explica tu respuesta.

Compara en clase tus resultados con los de algunos compañeros y validen en grupo sus estrategias de solución.

Historias de vida

Diofanto, nacido alrededor del año 200 y fallecido por el año 284 d. de C. , llamado el padre del álgebra, consideró estos tres tipos de ecuaciones cuadráticas $ax^2 + bx = c$, $ax^2 = bx + c$ y $ax^2 + c = bx$. La razón por la cual para Diofanto existen tres casos es que no tenía ninguna noción del cero y evitaba los coeficientes negativos considerando los números dados a , b , c como positivos.

Fuente: www.astroseti.org/articulo/3629/ (consulta: 23 de diciembre de 2016, 11:36 horas)

Presentación de nuestro trabajo

Reúnanse en equipos para presentar al grupo sus cajas. Expliquen el uso que asignaron a cada una.

- Compartan la expresión que escribieron para representar el volumen de las cajas y las ecuaciones correspondientes.
- Comparen los procedimientos que emplearon para resolver las ecuaciones.
- ¿Todos usaron el mismo procedimiento? ¿Cuál resultó más adecuado?
- ¿Son iguales las cajas de todos los equipos? ¿Por qué?

En grupo comenten sus experiencias y registren sus conclusiones acerca del contenido trabajado en la secuencia.

¿Cómo nos fue?

- ¿Qué es una ecuación cuadrática?
- ¿Cuántos métodos distintos para resolver ecuaciones se propusieron en el grupo? ¿Cuál te pareció el mejor? ¿Por qué?
- ¿Cuál es la relación de tu trabajo al hacer las cajas con la solución de las ecuaciones cuadráticas?
- ¿Qué papel jugaste en tu equipo durante la elaboración del proyecto?

Contenido

Construcción de figuras congruentes o semejantes (triángulos, cuadrados y rectángulos) y análisis de sus propiedades.

Tecnología y semejanza

Lee la información y responde en el cuaderno.

En la vida cotidiana se utilizan cámaras fotográficas y de video, así como fotocopiadoras, televisores, microscopios, telescopios y proyectores de cine para procesar imágenes semejantes a las originales. Por ejemplo, para obtener una identificación (credencial de estudiante, pasaporte y otras) se necesitan fotografías tamaño infantil, fotocopias de acta de nacimiento, etcétera.

Observa las fotografías: a partir de la de tamaño infantil, el fotógrafo generó las otras tres.



Tamaño cédula profesional



Tamaño pasaporte



Para llevar en la cartera



Tamaño infantil

Glosario

semejanza. Propiedad de las figuras que tienen exactamente la misma forma, aunque diferente tamaño.

Según tus observaciones:

- ¿Son las imágenes **semejantes** o solo son parecidas a la de tamaño infantil?
- ¿Cómo puedes identificar las fotografías que son semejantes?
- Si el fotógrafo necesita ampliar o reducir una fotografía tomada por un cliente, ¿qué debe tener en cuenta?
- ¿Qué longitudes compararías para verificar que dos figuras geométricas son semejantes?
- Observa una fotografía familiar. ¿Puedes calcular las medidas reales de las personas y los objetos que aparecen en ella? ¿Cómo?

Después regresarás a trabajar con este problema. Ahora reúnete con un compañero y lean la información del proyecto que realizarán.

Nuestro trabajo

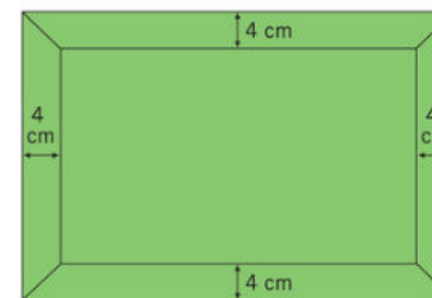
En parejas, diseñarán un **cartel** que contenga triángulos y rectángulos semejantes. Podrán elegir materiales como cartulina, cartoncillo, papel ilustración, lápices de colores, plumines y un juego de geometría. Harán el cartel a lo largo de la secuencia y al final lo expondrán al grupo. En los apartados "¿Cómo vamos?" encontrarán más información para elaborarlo.

© SANTILLANA

Comparación de rectángulos

Resuelve la actividad. Necesitarás regla, transportador, papel periódico u hojas recicladas y tijeras.

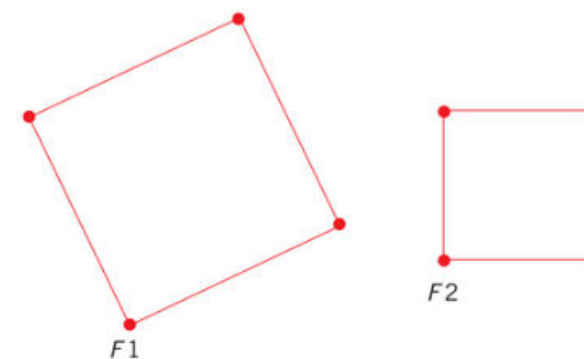
Cada año, en la escuela secundaria de Aliha toman una fotografía de la generación y la colocan en un marco. El margen entre la fotografía y la orilla del portarretratos es de 4 cm por lado, como se muestra en la imagen de la derecha.



- ¿Son semejantes el rectángulo de la fotografía y el rectángulo del portarretratos completo? Justifica tu respuesta. _____

Reúnete con un compañero y comenten las estrategias que siguieron para decidir si los dos rectángulos son semejantes. Comenten su respuesta con el profesor.

Para denotar que dos figuras son semejantes se utiliza el símbolo \sim que se lee "es semejante a". Por ejemplo, para decir que el cuadrado $F1$ es semejante al cuadrado $F2$ se escribe $F1 \sim F2$.



A continuación analizarán diferentes estrategias para decidir si dos rectángulos tienen la misma forma aunque diferente tamaño, es decir, si son semejantes.

Reúnete con un compañero y cada uno seleccione cinco de las siguientes longitudes de rectángulos. Tráncelos en hojas de colores y recórtelos.

- A: 10 cm x 6 cm D: 15 cm x 12 cm G: 16 cm x 10 cm J: 8 cm x 8 cm
- B: 6 cm x 4 cm E: 5 cm x 4 cm H: 24 cm x 15 cm
- C: 20 cm x 12 cm F: 18 cm x 12 cm I: 5 cm x 5 cm

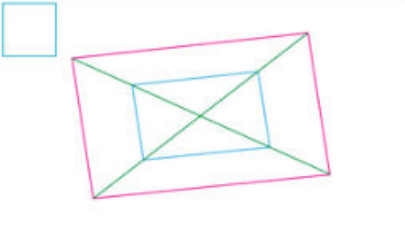
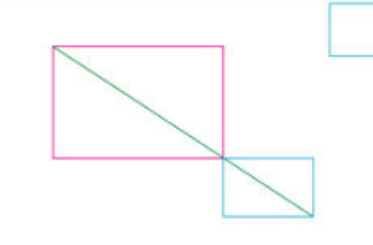
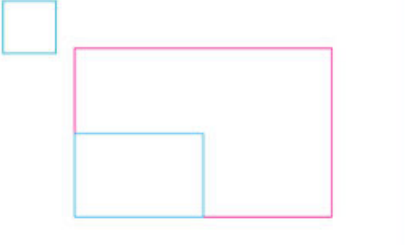
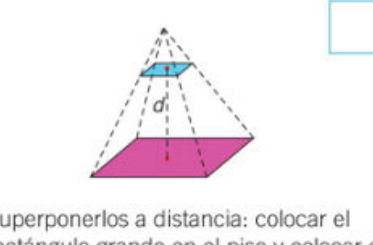
- Como estarán superponiendo y comparando los rectángulos que construirán, llámen "largo" al lado que tiene mayor longitud y "ancho" al que tiene menor longitud.
- De los rectángulos anteriores, encuentren las parejas semejantes. Hagan una tabla en su cuaderno y escriban la relación de semejanza entre ellos.

Intercambien sus resultados con otra pareja y comenten sus estrategias. Si tienen dudas, pregunten al maestro.

© SANTILLANA

En pareja, analicen los métodos y respondan.

En su grupo ya resolvieron cuáles son los rectángulos que hacen pareja; ahora analicen los cuatro métodos que propusieron los alumnos de la profesora Julieta. ¿Coincide alguno con el que ustedes utilizaron? Si es así, indíquelo con una ✓ en el recuadro de la izquierda.

	
<p>Trazar las diagonales y los centros de cada rectángulo y hacerlos coincidir.</p>	<p>Trazar una diagonal en cada rectángulo y hacer coincidir un vértice y la diagonal.</p>
	
<p>Encontrar el número de veces que cabe el rectángulo chico en el grande.</p>	<p>Superponerlos a distancia: colocar el rectángulo grande en el piso y colocar el pequeño arriba de este, tratando de que tape al grande.</p>

• ¿Cuáles métodos consideran útiles para verificar las respuestas del ejercicio anterior? _____

• Lean, completen la tabla y contesten.

La profesora Julieta propuso a sus alumnos otros dos métodos.

Método 1. Medir la longitud del largo y ancho de cada rectángulo. Calcular el cociente entre el lado mayor y el menor. Comparar los resultados.

Rectángulo	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
Largo										
Ancho										
Largo/Ancho										
Ángulos internos										

• ¿A partir de los datos de la tabla anterior pueden concluir cuáles rectángulos son semejantes? Argumenten. _____

© SANTILLANA

Método 2. Medir la longitud del largo y ancho de cada rectángulo. Calcular el cociente entre el largo de un rectángulo ($L1$) y su correspondiente en el otro rectángulo que se presume semejante ($L2$). Repetir el procedimiento con el ancho ($A1$ y $A2$). Comparar los resultados.

• En la tabla anoten en cada columna, por pares, las medidas de los rectángulos que consideren semejantes de los diez que recortaron. Después respondan.

Rectángulo					
$\frac{L1}{L2}$					
$\frac{A1}{A2}$					
Ángulos internos					

• ¿Qué observan en los resultados de la tabla anterior? _____

• ¿Cómo es el cociente entre los lados correspondientes de dos rectángulos semejantes? _____

• ¿Cómo son los ángulos correspondientes de los rectángulos semejantes? _____

La razón de dos lados correspondientes cualesquiera de dos figuras semejantes se llama **razón de semejanza**.

• Respondan y comenten con sus compañeros: ¿Qué propiedades se observan entre dos rectángulos semejantes? ¿Cómo se identifican las figuras semejantes? ¿En qué debemos fijarnos para determinar que dos figuras son semejantes?

Comparen sus respuestas en grupo y comenten sus dudas con el profesor. Después escriban sus conclusiones en el cuaderno.

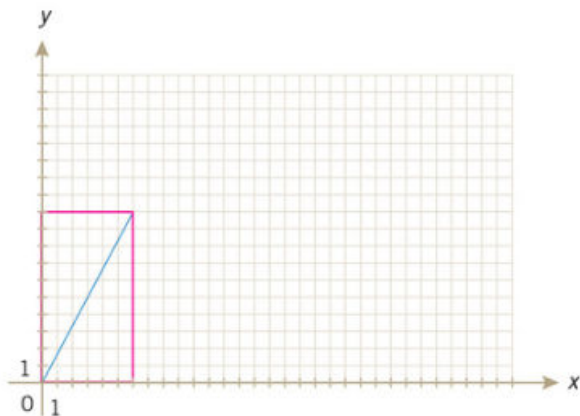
En matemáticas decimos que dos **figuras** son **semejantes** si tienen "exactamente" la misma forma aunque diferente tamaño. Las figuras a escala son un ejemplo de semejanza y al factor de escala se le llama **razón de semejanza**.

¿Cómo vamos?

Reúnete con tu compañero de equipo.

• Piensen qué figuras van a integrar y la estrategia que utilizarán para construir las figuras semejantes. Para identificarlas deberán tener el mismo color. Incluyan, por lo menos, dos figuras que no sean semejantes, a fin de que los demás equipos las descubran.

© SANTILLANA



Rectángulos semejantes

De manera individual resuelve lo siguiente.

Retoma los diez rectángulos de la actividad anterior y, en papel cuadriculado, traza una gráfica y colócalos de la siguiente manera: en el eje de las abscisas (eje de las x) coloca el valor del ancho y en el eje de las ordenadas (eje de las y) anota el valor del largo de cada rectángulo. Para los que consideres que son semejantes, utiliza el mismo color.

Una vez trazados tus rectángulos, realiza los siguientes ejercicios.

- Traza la diagonal de los rectángulos que consideres semejantes. ¿Qué observas en estos rectángulos? _____
- Construye un rectángulo semejante y otro que no lo sea con respecto de los rectángulos A , B , C y D que trazaste en la actividad anterior. Describe un procedimiento para construirlo en la cuadrícula. En cada caso, ¿cuál fue la razón de semejanza que utilizaste? _____
- Reúnete con un compañero y comparen sus procedimientos para construir rectángulos semejantes. ¿Es posible trazar una línea recta que contenga las diagonales de los rectángulos semejantes? ¿Qué relación tiene esta gráfica con las gráficas de relaciones proporcionales? _____

Comenten con el profesor los procedimientos que propusieron y sus conclusiones. Después, utilicen en grupo la siguiente información para validar sus conclusiones en relación con los rectángulos considerados como semejantes.

Para establecer la relación de semejanza entre rectángulos se debe cumplir que:

- Los lados correspondientes sean proporcionales. La **proporción** está dada por la razón de semejanza.
- Los ángulos correspondientes sean congruentes.

Dos figuras en el plano son semejantes si los cocientes entre los pares de segmentos correspondientes cualesquiera son iguales.

Considera la información anterior y contesta.

- Retomemos el problema del portarretrato. ¿Son semejantes el rectángulo del portarretrato completo y el rectángulo de la fotografía? Compara tu respuesta con la que diste inicialmente.
 - ¿Qué forma deberían tener el portarretrato y la fotografía para garantizar que siempre sean semejantes? _____

Comenta con tus compañeros y con el profesor los resultados obtenidos y la estrategia utilizada para decidir si hay una relación de semejanza entre los dos rectángulos.

Glosario

proporción. Es una relación de equivalencia entre dos cocientes o razones, expresada tradicionalmente así: $a:b::c:d$ o bien, $a/b = c/d$ (y se lee como "a es a b como c es a d") entre dos razones.

Construcción de triángulos semejantes: ¿Cuáles son sus características?

Traza las figuras y responde en el cuaderno.

Construye un triángulo cuyos lados midan: segmento $AB = 4$ cm, segmento $BC = 5$ cm y segmento $AC = 6$ cm. Ahora, traza un triángulo que sea semejante a este, conociendo que el lado correspondiente $A'B'$ mide 8 cm.

- Completa las siguientes medidas:

$B'C' =$ _____	$A'C' =$ _____
$\angle A =$ _____	$\angle B =$ _____
$\angle C =$ _____	$\angle A' =$ _____
$\angle B' =$ _____	$\angle C' =$ _____
- Analiza la información anterior y encuentra cómo son los cocientes entre los pares de segmentos correspondientes.
- Traza un triángulo acutángulo. Construye otro triángulo considerando que los ángulos correspondientes son congruentes y que la razón entre las parejas de los lados correspondientes es $1/1$.
 - ¿Qué relación hay entre los dos triángulos?
 - Si los sobrepones, ¿qué observas?

Con tu profesor y tus compañeros de grupo, expliquen la validez de la siguiente afirmación. Utilicen todo lo visto hasta ahora.

La **congruencia** es un caso particular de semejanza.

- Analicen cuál es la razón de las parejas de los lados correspondientes. ¿Se conserva la forma?, ¿cómo son las medidas de los ángulos correspondientes?

Discutan con el profesor sus conclusiones y escribanlas en el cuaderno.

Espacio tecnológico

Para profundizar en la semejanza de figuras, te sugerimos consultar las siguientes páginas. Allí encontrarás actividades interactivas en las que, con un programa de geometría llamado Descartes, podrás explorar las propiedades de semejanza en triángulos.

mimosa.pntic.mec.es/clobo/geoweb/semelj3.htm
recursostic.educacion.es/descartes/web/materiales_didacticos/Semejanza_poligonos/Semejan2.htm
 (consulta: 22 de diciembre de 2016, 19:10 horas)

Tareas

Resuelve las actividades en el cuaderno y presenta tus resultados en la siguiente clase. Comenta las estrategias de solución con tus compañeros y tu profesor y justifícalas geoméricamente. Utiliza las propiedades de semejanza.

1. Traza un rectángulo y, a partir de este, dibuja:
 - a) Un rectángulo semejante tal que sus lados correspondientes sean el doble que el dado.
 - b) Un rectángulo semejante tal que sus lados correspondientes sean $4/3$ que el dado.
 - c) Un rectángulo cuya razón de semejanza sea 1.5.
2. Investiga:
 - a) Dos aplicaciones cotidianas de semejanza.
 - b) Qué es una endoscopia y si la imagen real y la dada por la cámara son semejantes.

Historias de vida



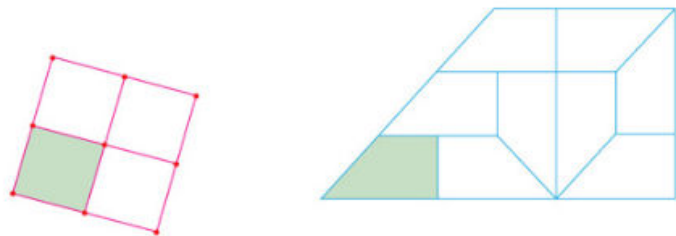
El doctor Solomon W. Golomb (profesor de la Universidad de Harvard, Massachusetts, Estados Unidos de América) ha contribuido al desarrollo de diversos juegos matemáticos, como los pentominós, que dio a conocer en 1953. Su mayor aporte lo constituyen los **rep-tile** (en inglés), que son precisamente los rompecabezas que trabajaremos en esta sección.

Rompecabezas y semejanza

Lee y haz lo que se indica. Necesitarás papel, lápiz, regla y tijeras. Pega tus figuras y escribe tus respuestas en el cuaderno.

Ya sabes cómo encontrar la relación de semejanza entre figuras. Ahora verás una aplicación de esta propiedad. En segundo grado trabajaste con polígonos que te permitían recubrir un plano (mosaicos, baldosas) y estudiaste la simetría axial. En la siguiente actividad utilizarás esos conocimientos.

Generarás, a partir de una figura geométrica y uniendo copias de esta, otra figura semejante a la original, es decir, una réplica mayor. A continuación se presentan dos ejemplos.



Glosario

rep-tile. Disección de un polígono en pequeñas copias de sí mismo.

ángulo. Región de una figura geométrica. Un ángulo está formado por dos semirrectas (o rayos) que tienen el mismo origen. Al origen se le llama vértice del ángulo y a las semirrectas que lo forman, lados inicial y final.

paralelogramo. Cuadrilátero con dos pares de lados opuestos paralelos.

En el primer caso, a partir de un cuadrado, podemos colocar otros y generar un cuadrado más grande, semejante al inicial. En el segundo ejemplo, tenemos un trapecio pequeño y al unir nueve copias de este, obtenemos uno más grande, semejante al original.

- Realiza una figura del mismo tipo que las de los ejemplos.
- Dibuja un triángulo en una hoja de papel y recórtalo. Haz tres copias de él. Une las copias de tal manera que se genere un triángulo más grande. ¿Es posible? ¿Por qué?

- ¿El nuevo triángulo es semejante al pequeño? Para verificarlo, compara las medidas de sus lados y **ángulos**.
- Compara tus resultados con dos compañeros.
 - ¿Todos usaron el mismo tipo de triángulo?
 - ¿En todos los casos fue posible construir un triángulo semejante al pequeño?
- Dibuja en otra hoja un **paralelogramo** y recorta nueve paralelogramos congruentes.
- Une cuatro paralelogramos de tal manera que se genere un paralelogramo más grande. ¿Es posible? ¿Por qué? _____
- ¿El nuevo paralelogramo es semejante al pequeño? Para verificarlo, compara las medidas de sus lados y sus ángulos.

© SANTILLANA

- Ahora repite el procedimiento, pero con los nueve paralelogramos. ¿Qué sucedió? ¿Es semejante este nuevo paralelogramo al pequeño? _____
- ¿Para qué paralelogramos se cumple lo anterior? _____

Lee y comenta con otros compañeros la siguiente información. Ilustra tu interpretación con tres ejemplos: uno de triángulo, otro de cuadrado y otro de rectángulo.

Decimos que dos **figuras** (F_1 y F_2) son **semejantes** si podemos transformar una en la otra. Pero, ¿cómo las transformamos? Debemos partir de que la semejanza tiene las siguientes propiedades:

- Transforma puntos alineados en otros puntos también alineados.
- Transforma un ángulo fijo en otro ángulo fijo **congruente**.
- Una figura original y la figura transformada mediante la semejanza son proporcionales.

Analiza con tu profesor cada afirmación. Con base en las propiedades anteriores, argumenta si son verdaderas.

- Todos los rectángulos son semejantes.
- Si dos figuras son congruentes, también son semejantes.
- Dado un rectángulo, se puede construir otro semejante si se suman dos unidades a cada lado del original.
- La relación entre el objeto real y la imagen dada por las siguientes herramientas tecnológicas es semejante: cámaras fotográficas, fotocopiadoras, lupas, microscopios y telescopios.
 - Si amplías o reduces una figura, el resultado es una figura parecida, pero no necesariamente semejante.
 - Las circunferencias son parecidas entre sí, pero no semejantes.

Presentación de nuestro trabajo

Reúnete con tu equipo. Presenten al grupo su cartel.

- Expliquen a sus compañeros las estrategias que utilizaron para construir las figuras semejantes. Comenten las dificultades que se les presentaron y cómo las resolvieron.
- Una vez que hayan terminado las presentaciones, intercambien sus trabajos y señalen las figuras que no son semejantes. De los carteles presentados, ¿cuál consideran que es el más original? ¿En cuál se usó con más creatividad la semejanza? Coméntenlo con el profesor.

¿Cómo nos fue?

- Escribe qué significa *semejanza entre dos figuras*. Describe un procedimiento que permita construir una figura semejante a una dada.
- ¿Ahora puedes calcular las medidas reales de quienes aparecen en una fotografía familiar? Describe el procedimiento.
- ¿Qué dificultades surgieron para realizar las actividades? ¿Cómo las resolvieron?

Glosario

congruencia.

Relación entre dos segmentos, dos ángulos o dos figuras. Así, dos ángulos son congruentes si tienen la misma medida; dos figuras son congruentes si son iguales en tamaño y forma, las dos deben coincidir cuando una se superpone a la otra.

Cierre

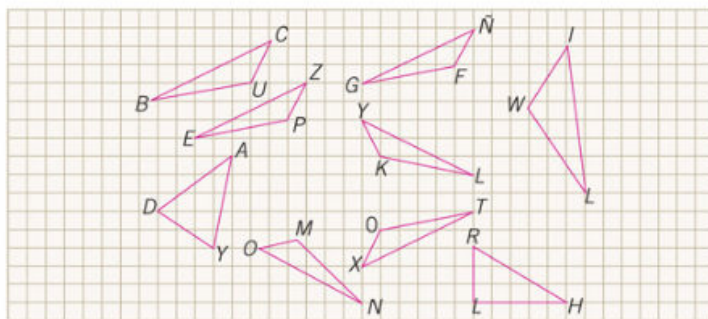
Criterios de congruencia y semejanza de triángulos

Contenido

Explicitación de los criterios de congruencia y semejanza de triángulos a partir de construcciones con información determinada.

Relaciones entre triángulos

Analiza los triángulos y contesta en tu cuaderno.



- ¿Qué estrategia utilizarías para encontrar los triángulos que son congruentes con el triángulo PEZ ? ¿Qué estrategia utilizarías para compararlos y verificar cuáles son semejantes al triángulo PEZ ?
- Si tienes que construir un triángulo semejante y otro congruente al triángulo PEZ , ¿qué datos mínimos necesitas conocer?
- ¿Cuáles criterios de congruencia y de semejanza de triángulos conoces? ¿Para qué son útiles?

Comenta tus respuestas con el profesor y tus compañeros. Haz una lista de las diferentes estrategias y selecciona las que justifican mejor la congruencia y la semejanza de los triángulos.

A lo largo de las actividades retomarás este problema. Antes, forma un equipo y lean la información que describe el proyecto que llevarán a cabo a lo largo de la secuencia.

Nuestro trabajo

En equipos de cuatro integrantes, diseñarán un logotipo para un campeonato escolar. Su diseño deberá contener triángulos congruentes y semejantes.

- Cada integrante deberá construir triángulos congruentes y semejantes a uno dado utilizando por lo menos tres procedimientos diferentes.
- Para elaborar su logotipo necesitarán compás, transportador, regla y hojas de colores.
- Al final, mostrarán sus logotipos al resto del grupo y explicarán los criterios de congruencia y semejanza de triángulos que emplearon en su elaboración.

© SANTILLANA

Triángulos congruentes

Lee y haz lo que se pide.

Una manera de saber si dos triángulos son congruentes consiste en superponer uno sobre otro y verificar si coinciden las medidas de sus lados y de sus ángulos.

Si calcas los triángulos PEZ y YKL de la página anterior, los recortas y los superpones, notarás que el triángulo PEZ y el triángulo YKL sí son congruentes. Simbólicamente se escribe: $\triangle PEZ \cong \triangle YKL$ y se lee "el triángulo PEZ es congruente con el triángulo YKL ".

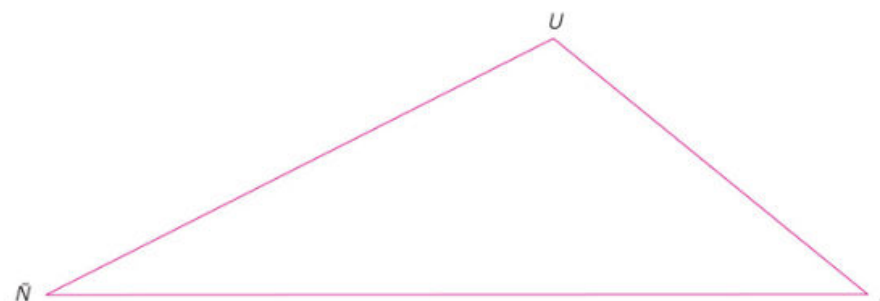
- Calca en una hoja de papel o en cartoncillo los triángulos de la página anterior y superponlos al triángulo PEZ . ¿Cuáles son congruentes con este y cuáles no? _____

Comenta con un compañero tus resultados y, si es necesario, corrige tus respuestas de la actividad inicial.

Construir triángulos congruentes

Haz en el cuaderno lo que se indica.

- Utiliza regla, compás y transportador para trazar un triángulo congruente con el triángulo $\hat{N}UA$.



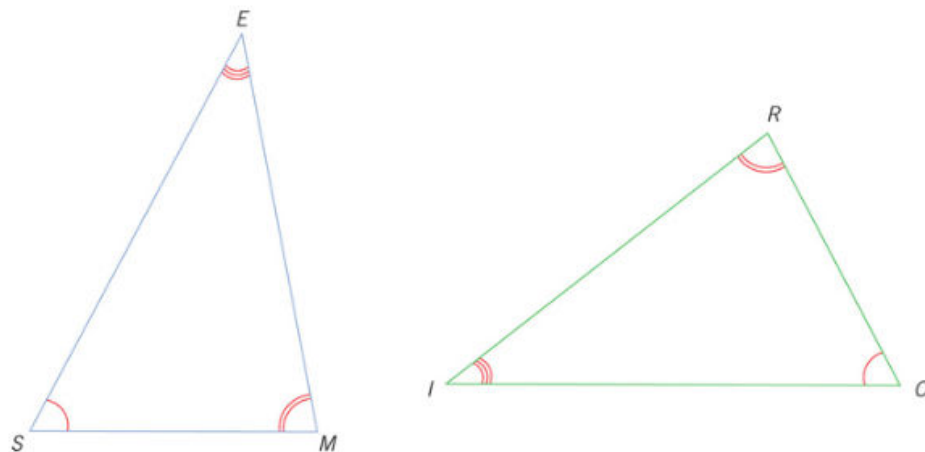
- Escribe el procedimiento que seguiste para construir el triángulo congruente.
 - ¿La medida de los lados y los ángulos del triángulo $\hat{N}UA$ coincide con las medidas de los lados del triángulo que trazaste?
 - ¿Es suficiente conocer la medida de los tres lados de un triángulo para construir otro congruente con él? Argumenta tu respuesta.
 - ¿Qué elementos del triángulo $\hat{N}UA$ se deben conocer para trazar un triángulo congruente con él?
- Mide la longitud de dos lados y un ángulo del triángulo $\hat{N}UA$ y con esta información trata de construir en el cuaderno un triángulo congruente con este. ¿Fue posible? Argumenta tu respuesta.
- Calca en una hoja el triángulo que trazaste, recórtalo y ponlo sobre el que trazaron algunos de tus compañeros.
 - ¿El triángulo que trazaste es congruente con el que trazaron tus compañeros? ¿Por qué?
 - ¿Es suficiente conocer la medida de los tres ángulos de un triángulo para construir uno congruente con él?

© SANTILLANA

- Haz un triángulo congruente con el que acabas de trazar, pero en diferente posición.
 - ¿Tu nuevo triángulo está en la misma posición de los triángulos que trazaron tus compañeros?
 - ¿El nuevo triángulo es congruente con los de tus compañeros? Explica tu respuesta.
- Escribe una conclusión sobre la congruencia de dos triángulos y la medida de sus lados. Después escribe una conclusión sobre la congruencia de dos triángulos y la medida de sus ángulos.

Como habrás notado, para garantizar la congruencia entre dos triángulos basta con asegurar que las medidas de los tres lados correspondientes sean iguales y las medidas de los tres ángulos correspondientes también sean iguales. Los triángulos RIO y MES son congruentes, por tanto, el segmento RI es congruente con el segmento ME ($\overline{RI} \cong \overline{ME}$), el segmento RO es congruente con MS ($\overline{RO} \cong \overline{MS}$) y el segmento IO es congruente con ES ($\overline{IO} \cong \overline{ES}$).

Analiza los ángulos de cada triángulo y completa las congruencias. Observa el ejemplo.



El ángulo RIO es congruente con el ángulo MES ($\angle RIO \cong \angle MES$).

- El ángulo IOR es congruente con _____
- El ángulo ORI es congruente con _____

Compara tus resultados con los de otros compañeros. Después traza un triángulo $AÑO$ congruente con los triángulos RIO y MES , y escribe las congruencias entre sus lados y ángulos correspondientes.

La manera en que se denota a los segmentos y a los ángulos de los triángulos tiene un orden, el cual determina la correspondencia entre segmentos y entre ángulos. Ángulos y lados correspondientes entre los dos triángulos.

¿Cómo vamos?

Reúnete con tu equipo y elijan el tema de su logotipo.

- Analicen cómo pueden aplicar lo que han aprendido sobre congruencia de triángulos en la elaboración de su logotipo. Primero decidan el tipo de triángulos que llevará su diseño (equiláteros, escalenos, isósceles). Después tracen varios triángulos congruentes de distintos colores.
- Recuerden que es posible construir diferentes polígonos usando como base un triángulo. Si quieren que en su diseño haya cuadrados, ¿cómo los pueden trazar usando triángulos congruentes? ¿Qué tipo de triángulos emplearían? Si quieren que en su diseño haya distintos cuadriláteros, ¿cómo pueden usar triángulos congruentes para construirlos?

¿Cuántos datos es suficiente conocer?

En equipos de cuatro integrantes, realicen la siguiente actividad.

Uno de los integrantes del equipo deberá trazar en una hoja un triángulo OPS sin que los demás lo vean. Cada lado y cada ángulo deberá tener una medida específica. Los otros tres integrantes del equipo trazarán un triángulo congruente con el de su compañero, pero sin verlo. Deben decidir cuáles medidas del triángulo dibujado necesitan y solicitarlas. Gana quien trace el triángulo congruente con menos datos.

- En la siguiente tabla escriban el nombre de cada integrante del equipo y marquen con una los datos que solicitaron.

Nombre	Nombre	Nombre	Nombre
$\angle OPS$	$\angle OPS$	$\angle OPS$	$\angle OPS$
$\angle OSP$	$\angle OSP$	$\angle OSP$	$\angle OSP$
$\angle POS$	$\angle POS$	$\angle POS$	$\angle POS$
\overline{OP}	\overline{OP}	\overline{OP}	\overline{OP}
\overline{PS}	\overline{PS}	\overline{PS}	\overline{PS}

- Comparen sus resultados y decidan quién ganó.
- Analicen las estrategias empleadas y resalten las más eficientes.
- Reúnanse con otro equipo y comenten las estrategias más eficientes.
 - ¿Cuántos datos, como mínimo, se requieren para trazar un triángulo congruente con otro? Expliquen por qué. _____

Comenten sus respuestas en grupo y escriban sus conclusiones en el cuaderno.

Criterios de congruencia de triángulos

Resuelvan la actividad en pareja.

Los integrantes del equipo de Juliana le solicitaron los datos que se muestran en la siguiente tabla. A estos datos los llamaron *criterios*. Usaron la letra **L** para nombrar los lados y la **A** para los ángulos. Por ejemplo, **LAL** significa que los datos necesarios son dos lados y el ángulo comprendido entre estos.

Carlos	Alfredo	Raúl	Gilda
Ángulo OPS , mide 32°	Segmento OP , mide 15.5 cm Segmento PS , mide 7.42 cm Segmento OS , mide 10 cm	Segmento PS , mide 7.42 cm Ángulo PSO , mide 125° Segmento OS , mide 10 cm	Ángulo PSO , mide 125° Ángulo POS , mide 23°
Criterio: A	Criterio: LLL	Criterio: LAL	Criterio: AA

Otro equipo trabajó con el mismo triángulo que trazó Juliana. Sus integrantes solicitaron los datos que se muestran a continuación.

Esmeralda	Verónica	Francisco	Griselda
Segmento PS , mide 7.42 cm Ángulo PSO , mide 125° Segmento OS , mide 10 cm	Ángulo PSO , mide 125° Ángulo POS , mide 23° Ángulo OPS , mide 32°	Segmento OP , mide 15.5 cm Segmento PS , mide 7.42 cm Segmento OS , mide 10 cm Ángulo POS , mide 23°	Segmento OP , mide 15.5 cm Segmento PS , mide 7.42 cm
Criterio: LAL	Criterio: AAA	Criterio: LLLA	Criterio: LL

- Seleccionen dos de los criterios postulados por los estudiantes que trabajaron con el triángulo de Juliana. Intenten trazar en una hoja el triángulo con esos datos. ¿Fue posible hacerlo? Escriban debajo de cada criterio *Sí* o *No*, según corresponda.
- Analicen y escriban si con la información dada pudieron construir uno, dos o más triángulos. Expliquen por qué. _____

- Marquen en las tablas anteriores los criterios que permiten construir triángulos congruentes.
- Comparen sus respuestas con las de otra pareja. Justifiquenlas y discutan las diferencias. Después escriban sus conclusiones en el cuaderno.

- Comparen sus conclusiones con la siguiente información.

Hay **tres criterios** que garantizan la **congruencia de triángulos**. En cada uno es necesario conocer tres datos específicos: los tres lados (**LLL**), dos lados y el ángulo comprendido entre ellos (**LAL**), dos ángulos y el lado comprendido entre ellos (**ALA**). Aunque es menos usual, también hay un criterio con el que se garantiza la congruencia entre triángulos a partir de la medida de dos ángulos contiguos y el lado opuesto a uno de los ángulos (**AAL**).

Subrayen las afirmaciones verdaderas. Retomen los criterios anteriores y argumenten sus respuestas en el cuaderno.

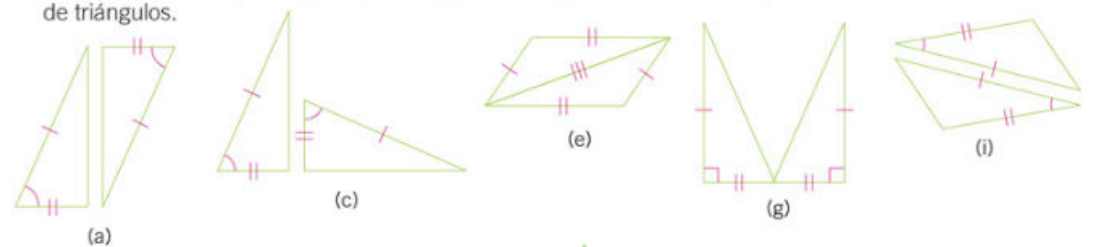
- Paola afirma que dados dos triángulos con la misma altura y la misma base son necesariamente congruentes.
- Amaranta afirma que si se sabe que dos triángulos rectángulos tienen la hipotenusa y uno de los catetos iguales, entonces los dos triángulos son congruentes.
- Leonardo afirma que si se tiene un triángulo isósceles y se traza la bisectriz del ángulo opuesto a los ángulos iguales, entonces el triángulo queda dividido en dos triángulos congruentes.

En grupo, representen geoméricamente cada situación para verificar sus respuestas. Si tienen dudas, pidan ayuda al maestro.

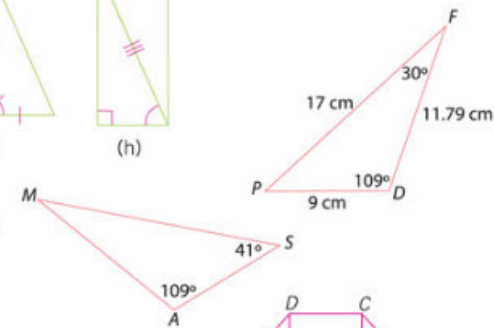
Tareas

Resuelve en tu cuaderno.

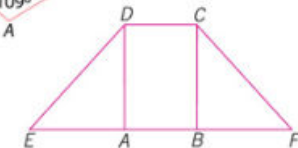
1. Escribe el criterio que se aplica para asegurar la congruencia entre cada par de triángulos.



2. Los triángulos PDF y SAM son congruentes. ¿Cuánto mide el segmento AS ?



3. En la figura, $ABCD$ es un rectángulo y $\angle EDA \cong \angle FCB$. ¿Qué criterio permite demostrar que $\triangle EAD \cong \triangle FBC$?



Revisen en grupo sus respuestas de la tarea y, juntos, corrijan los errores.

Triángulos semejantes

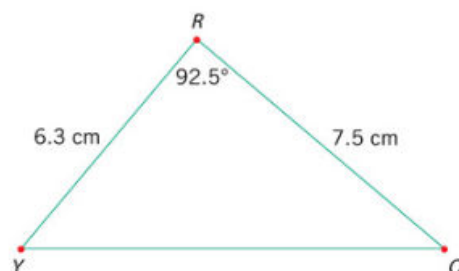
Comenta la siguiente información con un compañero y, juntos, contesten.

Dos triángulos son semejantes si:

- Sus tres ángulos y sus correspondientes (u homólogos) son congruentes.
- Sus tres lados y sus homólogos (o correspondientes) son proporcionales.

Sin embargo, podemos determinar la semejanza de dos triángulos sin necesidad de medir y comparar todos sus lados y todos sus ángulos. A estos principios se les conoce como **criterios de semejanza** y son tres.

- Analicen qué información consideraran sería la mínima requerida para decidir si dos triángulos son semejantes. Como máximo deben ser tres datos. ¿Cuáles elegirían?



Observen el triángulo de la izquierda. Después analicen la información de la tabla, identifiquen cuáles datos permiten construir un triángulo semejante al dado y complétenla. Realicen las construcciones necesarias en su cuaderno para comprobar sus respuestas.

Datos del otro triángulo						¿Pudieron construir el triángulo semejante?	
$\angle R$	$\angle O$	$\angle Y$	$Y'R'$	$R'O'$	$O'Y'$	Si	No
92.5°	39°	48.5°					
			1.26 cm	1.5 cm	2 cm		
92.5°			1.26 cm	1.5 cm			
			1.26 cm		2 cm		
92.5°	39°						
		48.5°		1.5 cm	2 cm		

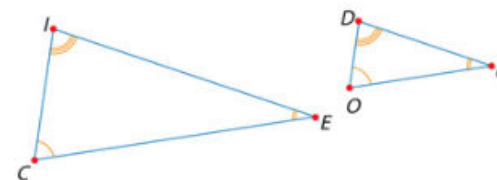
- Comparen los resultados con sus criterios para determinar la semejanza entre triángulos. Con esta información, de ser necesario, reformulen sus criterios y nombrenlos.
- Ahora, comparen la siguiente información con los criterios que propusieron.

Para decidir si dos triángulos son semejantes, basta con que se cumpla alguno de los siguientes **criterios**.

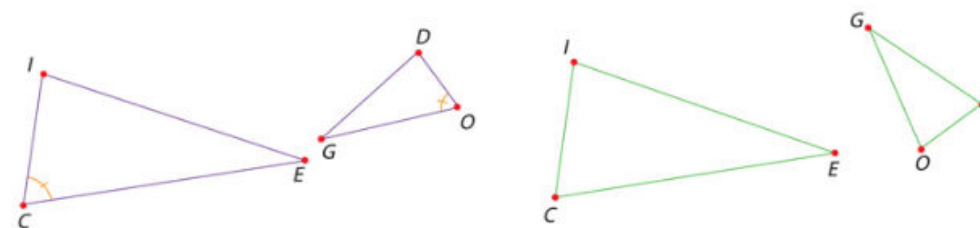
- Que dos ángulos homólogos entre los triángulos sean congruentes: **Criterio AA**.
- Que un ángulo homólogo sea congruente y que los lados que forman dicho ángulo sean proporcionales: **Criterio LAL** (Lado-Ángulo-Lado).
- Que todos los lados homólogos sean proporcionales: **Criterio LLL** (Lado-Lado-Lado).

© SANTILLANA

- Lean de nuevo el primer criterio de la página anterior y reflexionen acerca de por qué no se requiere el tercer ángulo. _____
- Analicen las siguientes parejas de triángulos.



$$1. \angle I \cong \angle D \quad \angle E \cong \angle G$$



$$2. \angle C \cong \angle O \text{ y } \frac{IC}{DO} = \frac{CE}{OG}$$

$$3. \frac{IC}{DO} = \frac{CE}{OG} = \frac{EI}{GD}$$

- ¿Qué información es necesaria y suficiente para determinar la semejanza entre dos triángulos? _____

Comenten en grupo sus conclusiones. Si tienen dudas, consulten al profesor.

Algo más acerca de la semejanza de triángulos

Realiza las actividades y comprueba lo que aprendiste sobre la semejanza de triángulos. Contesta en el cuaderno.

- En papel milimétrico, dibuja dos triángulos semejantes.
 - Calcula la razón de semejanza.
 - Calcula el perímetro de cada triángulo.
 - Calcula la razón entre los perímetros de los dos triángulos semejantes. ¿Qué observas?
 - Calcula el área de cada triángulo, después calcula la razón entre las áreas de los dos triángulos. ¿Qué observas?
 - Escribe la relación que hay entre los perímetros y la razón entre las áreas de dos triángulos semejantes.

Reúnete con dos compañeros y comenten sus conclusiones.

© SANTILLANA

- Analicen conjuntamente las siguientes afirmaciones. En cada caso, decidan si es verdadera (V) o falsa (F).

Afirmación	V	F
Una recta paralela a un lado de un triángulo forma un triángulo semejante al otro.		
Todos los triángulos rectángulos son semejantes.		
La altura sobre la hipotenusa de un triángulo rectángulo divide a este en dos triángulos semejantes al dado y entre sí.		
Todos los triángulos equiláteros son semejantes.		
Dos triángulos son semejantes si sus lados homólogos son paralelos entre sí.		
Dos triángulos congruentes no son semejantes.		

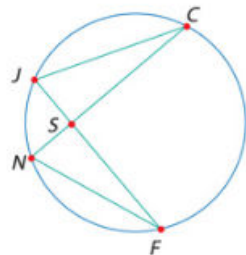
- Escriban en su cuaderno un argumento geométrico para apoyar cada una de sus respuestas. Si es falsa la afirmación, el argumento geométrico consistirá en dar un contraejemplo.

Comenten sus respuestas con el resto del grupo y su profesor. Juntos, lleguen a conclusiones.

El **triángulo** es una figura plana a la que, desde la primaria, se le dedican varias horas de clase. Como habrás notado, su importancia radica en que cualquier figura poligonal se puede **triangular**, es decir, descomponer en un conjunto de triángulos y, así, analizar más fácilmente sus propiedades. En este caso, también se utilizan los criterios de semejanza de triángulos para decidir si dos polígonos son semejantes o no.

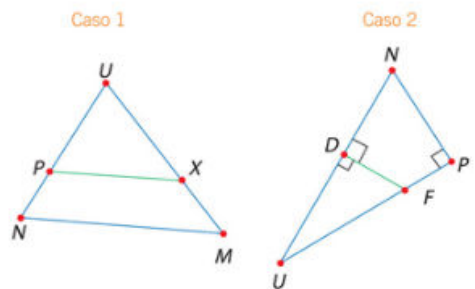
Tareas

Resuelve en tu cuaderno.



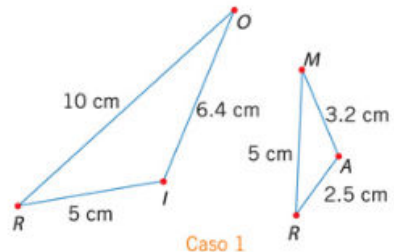
1. En la circunferencia de la izquierda se tienen las cuerdas JC , JF , NC y NF . Argumenta por qué los triángulos JCS y NFS son semejantes.

2. Encuentra la razón de semejanza en cada uno de los siguientes casos y establece las proporciones para los triángulos semejantes. Ten en cuenta que en el caso 1 se sabe que $PX \parallel NM$.

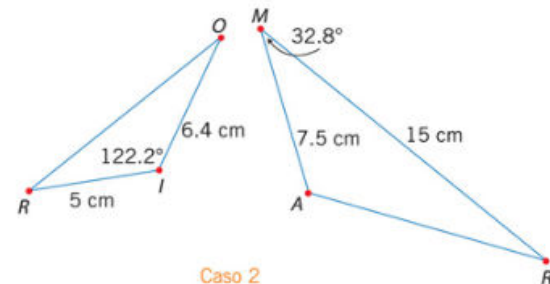


© SANTILLANA

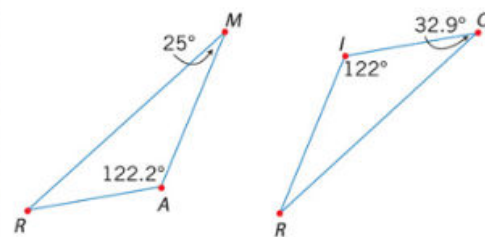
3. A continuación se presentan cuatro casos. Señala aquellos en los que puedes garantizar, por la información dada, la semejanza entre los triángulos. Menciona el criterio de semejanza utilizado y, si es posible, calcula la razón de semejanza.



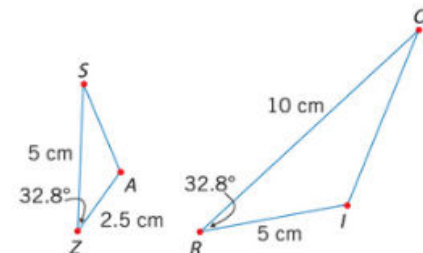
Caso 1



Caso 2



Caso 3



Caso 4

Revisa tus respuestas en clase y, con ayuda del profesor, corrige los errores.

Presentación de nuestro trabajo

Reúnete con tu equipo. Expongan su logotipo a los demás compañeros del salón.

- Comenten cómo aplicaron los criterios de congruencia de triángulos en la elaboración del logotipo.
- Comenten las estrategias que utilizaron, así como las ventajas y desventajas que encontraron al elaborar su diseño. Valídenlas con argumentos geométricos y con ayuda de su profesor.
- Organicen una votación para determinar cuál logotipo le gustó más al grupo.

¿Cómo nos fue?

- ¿Cuáles estrategias fueron más efectivas en el diseño de su equipo?
- ¿Notaron que la simetría crea figuras congruentes? ¿Aplicaron esto en su diseño?
- Pregúntate, reflexiona y piensa en una estrategia para mejorar el diseño de su logotipo.
- De los diferentes criterios para determinar la congruencia de triángulos, selecciona dos de ellos y descríbelos. Imagina que otro estudiante de segundo de secundaria en otro estado de la República Mexicana va a leer tu texto y debe entenderlo.

© SANTILLANA

Representaciones de proporcionalidad



Al tomar las pulsaciones en el cuello, es importante aplicar presión bajo el ángulo del mentón.

Contenido

Análisis de representaciones (gráficas, tabulares y algebraicas) que corresponden a una misma situación. Identificación de las que corresponden a una relación de proporcionalidad.

Pulsaciones por minuto

Lee la siguiente situación y responde.

La frecuencia cardiaca se define como las veces que late el corazón por unidad de tiempo, generalmente se expresa en pulsaciones por minuto. En la escuela de Paola, en la clase de Educación Física, el maestro midió la frecuencia cardiaca de los estudiantes para conocer su estado de salud.

El profesor de Paola obtuvo los siguientes resultados: Alfonso tuvo 120 pulsaciones en 100 segundos; Paola, 95 en un minuto; Fernanda, 190 pulsaciones en 120 segundos y Luis 49 pulsaciones en 30 segundos.

- ¿Cuántas pulsaciones por minuto tiene cada alumno? _____
- ¿Qué tipo de relación representan el tiempo y las pulsaciones registradas? Argumenta tu respuesta. _____
- ¿Qué sucede con el número de pulsaciones al aumentar el tiempo? _____
- ¿De qué formas puedes representar la información obtenida? _____

Comenta tus respuestas en grupo. A lo largo de las actividades regresarás a trabajar con estas preguntas.

A continuación se describe en qué consiste el proyecto que realizarás durante esta secuencia y la forma de trabajo.

Nuestro trabajo

En equipos, **medirán y registrarán su frecuencia cardiaca**, en reposo y después de una actividad física. Necesitarán un reloj o cronómetro, hojas, cartulina y una regla.

- Registrarán la cantidad de latidos por minuto en reposo.
- Registrarán sus pulsaciones, luego de una actividad física.
- Determinarán la manera de representar los resultados de su registro.
- Al final, expondrán sus resultados a sus compañeros de grupo.
- Durante la secuencia encontrarán más información para su proyecto en los apartados "¿Cómo vamos?".

Pulsaciones

Retoma la situación inicial, completa la tabla y responde en tu cuaderno.

- Calcula cuántas pulsaciones tendrían en cada intervalo de tiempo.

Tiempo (segundos)	Pulsaciones			
	Alfonso	Paola	Fernanda	Luis
120			190	
100	120			
60		95		
30				49

- ¿Qué sucede con las pulsaciones a medida que aumenta el tiempo?
- ¿Es proporcional el número de pulsaciones con respecto al tiempo? ¿Qué tipo de proporcionalidad es? ¿Por qué?
- Reflexiona. ¿Cómo sería la gráfica que represente cada situación?

Compara tus respuestas con las de tus compañeros y válidalas.

En una relación como la que acabas de analizar, un dato (número de pulsaciones) depende de otro (tiempo). Es decir, una variable cambia en función del otro. Este tipo de relación se conoce como **relación funcional**.

- ¿De qué maneras se puede representar una relación de este tipo? Coméntalo con tus compañeros y con el maestro. Registra los acuerdos en tu cuaderno.

Reúnete con un compañero y resuelvan.

- Nombren cada variable con una letra y escriban en su cuaderno una expresión algebraica que represente la relación para cada alumno.
- Utilicen las funciones que escribieron para cada alumno y completen la tabla. Después, respondan en su cuaderno.

Tiempo (minutos)	Pulsaciones			
	Alfonso	Paola	Fernanda	Luis
1				
2				
3				
4				
5				

- ¿El aumento de pulsaciones cada minuto es igual para todos los niños? ¿Cómo se refleja este aumento en las expresiones algebraicas?
- ¿Qué tipo de expresión algebraica representa una situación de proporcionalidad? ¿Tienen esta forma las expresiones que escribiste?

Comenten sus respuestas en grupo y con su maestro.

¿Cómo vamos?

Divídanse en equipos y midan el pulso de sus compañeros de equipo.

Para medir el pulso en reposo, hagan lo siguiente:

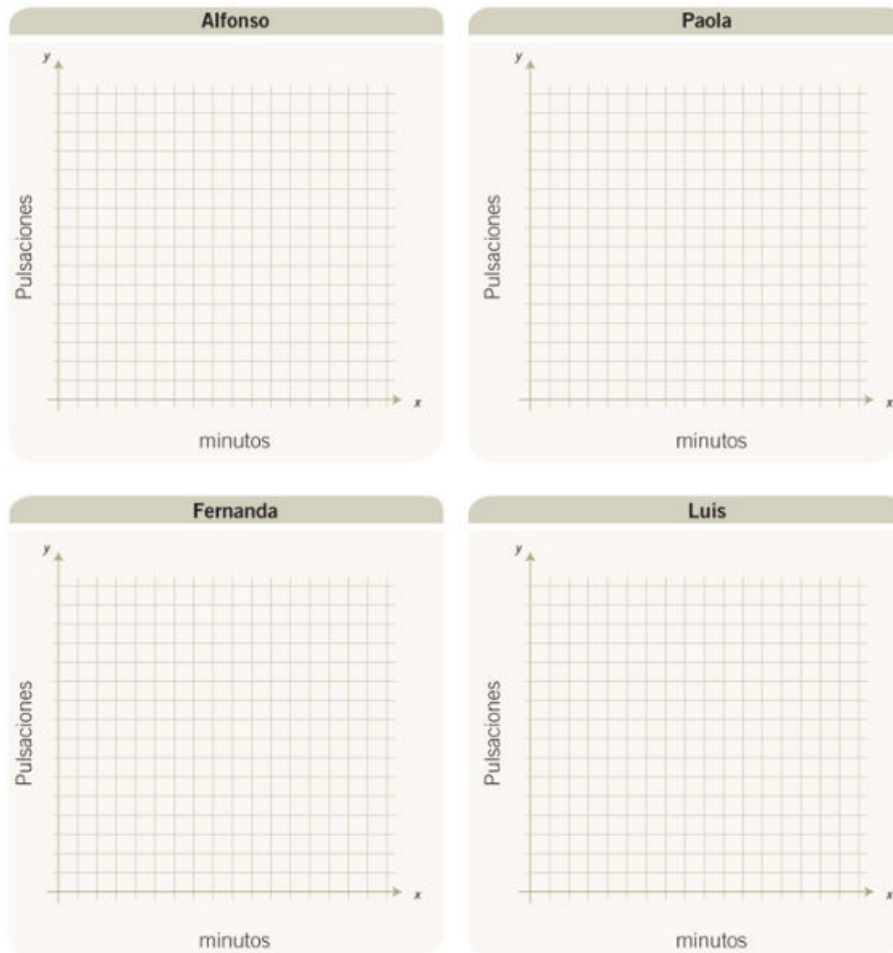
- Coloquen los dedos índice y medio sobre el cuello hasta sentir el latido.
- Cuenten los latidos durante 15 segundos y multipliquen el resultado por 4 para obtener las pulsaciones de un minuto.

Para medir el pulso luego de una actividad física:

- Salgan a correr al patio durante 4 minutos. Al terminar, midan sus pulsaciones de la misma forma del caso anterior.
- Realicen una tabla de valores para cada caso y escriban una expresión algebraica que represente esta relación.

Gráficas del pulso

Retoma los datos de la actividad inicial y haz una gráfica que exprese la relación pulsaciones-tiempo para cada niño.



- Observa las gráficas que trazaste y responde en tu cuaderno.
 - ¿Qué forma tienen? ¿En qué se parecen? ¿En qué son diferentes?
 - ¿Cuál es la inclinación de cada recta con respecto al eje x ?
 - ¿Todas las rectas pasan por el origen?
 - ¿Cuál es la recta de menor pendiente? ¿Y la de mayor pendiente?
 - ¿Cómo se ve en una gráfica una relación de proporcionalidad?

Comenta con tus compañeros y con tu maestro las tres maneras de representar la situación inicial.

Otras situaciones

En parejas, analicen las situaciones y resuelvan.

Maratonista

Imaginen que un maratonista corre toda una carrera a una velocidad constante. Después de dos horas lleva recorridos 22 km.

- ¿Cuántos kilómetros ha corrido después de 1.5 horas? ¿Y después de 3.5 horas? ¿Cuánto tarda en correr los 42 km de la competencia?
- Utilicen sus respuestas para completar la tabla.

Tiempo (horas)	Distancia (km)
1.5	
2	22
2.5	
3.5	
	42

- Escriban una expresión algebraica que represente la relación entre el tiempo (x) y los kilómetros recorridos (y). _____
- ¿Se trata de una relación de proporcionalidad? ¿Cómo lo saben? _____
- Elaboren una gráfica que relacione el tiempo con los kilómetros recorridos.



- Con base en la gráfica, ¿es posible saber cuántos kilómetros recorre el maratonista en cualquier minuto de la carrera? _____
- ¿Qué forma tiene la gráfica que trazaste? _____
- ¿La gráfica pasa por el origen? _____
- ¿Cómo se puede saber, a partir de la gráfica, si la relación anterior es de proporcionalidad? _____

Renta de películas

En una tienda de renta de películas la membresía anual cuesta \$150 y la renta de cada película \$20.

- ¿Cuánto gasta anualmente una persona que renta en total 8 películas en un año? ¿Y si renta 16 películas? Completen la tabla para determinarlo y, con base en la información, contesten.

Películas rentadas en el año	Gasto anual (en pesos)
1	
2	
3	
4	
8	
	350
20	550
25	
	750
35	

- ¿Cómo calcularían el número de películas que corresponde a un gasto de \$390?
- Al aumentar al doble el número de películas rentadas, ¿cómo aumenta la cantidad por pagar? ¿Y si disminuye a la mitad? _____
- Escriban una expresión algebraica que relacione el número de películas con el gasto anual por la renta. _____
- ¿Es proporcional el número de películas rentadas y la cantidad anual por pagar? ¿Por qué? _____
- ¿En qué se parece esta expresión a las que encontraste en el problema del pulso y en el del maratonista? ¿En qué son diferentes? _____

- Utilicen los datos de la tabla de la página anterior para trazar una gráfica que relacione el número de películas rentadas con el gasto anual en rentas.



- ¿Cómo es la gráfica comparada con las que realizaron anteriormente en la secuencia? ¿Se forma una línea recta? ¿Pasa por el origen? ¿Cuál es su pendiente? Describanla. _____
- ¿En la situación anterior hay una relación de proporcionalidad? ¿Cómo puede saberse eso a partir de la gráfica? _____

La tienda

La tabla muestra la relación entre el número de artículos y el monto total que hay que pagar por ellos en una tienda donde todos los artículos cuestan lo mismo.

Artículos (cantidad)	Monto total (pesos)
2	27
3	40.5
5	67.5
10	135
15	202.5
20	270

- Respondan en el cuaderno.
 - ¿Cuál es el costo de un solo artículo?

- ¿Cuánto se pagará si no se compra nada?
- ¿Cuánto habrá que pagar por 4 artículos? ¿Y por 100?
- ¿Cuántos artículos se pueden comprar con \$250?
- Encuentren una expresión que indique el monto por pagar en función de la cantidad de artículos comprados. Indiquen qué representa cada variable utilizada.
 - ¿Es válida esta relación para cualquier número de artículos? ¿Por qué?
- Tracen una gráfica que represente la relación entre la cantidad de artículos y el monto total por pagar.
 - ¿Cuál es la pendiente de la recta que graficaste? ¿Y su ordenada al origen?
 - ¿Cómo se ve en la gráfica lo que hay que pagar si no se compra nada? ¿Cómo se ve cuántos artículos corresponden a un pago de \$108?
 - ¿Es posible saber si existe una relación de proporcionalidad entre cantidad y monto total a partir de la gráfica? ¿Cómo?

Las rebajas

En una tienda de rebajas, el precio con descuento de cada producto se calcula con la expresión $y = 0.7x$.

- ¿Qué representa cada variable? _____
- ¿Qué significa el factor 0.7 y qué tanto por ciento se rebaja cada producto? _____
- ¿Pueden asignar a x números fraccionarios o decimales? ¿Por qué? _____
- ¿Puede y ser un número fraccionario o decimal? ¿Por qué? _____
- En el cuaderno, hagan una gráfica que represente la relación entre x y y .
 - ¿Qué características tiene la gráfica? _____
 - ¿Cuál es su pendiente y ordenada al origen? _____
 - ¿Representa una relación de proporcionalidad? ¿Por qué? _____

Comparen con el grupo sus respuestas en cada caso y escriban sus conclusiones con ayuda del maestro.

¿Cómo vamos?

Reúnete con tu equipo, retomen la información que obtuvieron al medir el pulso y realicen lo que se indica.

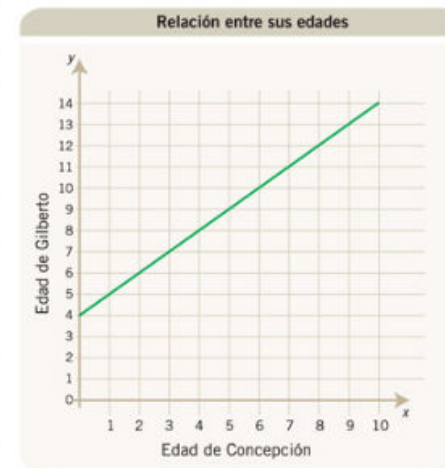
- Con base en la tabla de datos y en la expresión algebraica, hagan una gráfica que muestre la frecuencia cardiaca que obtuvieron en reposo y otra que la exprese después de haber corrido.
- Comparen las expresiones algebraicas que representan los latidos de cada integrante del equipo.
- ¿La misma expresión algebraica puede utilizarse en todos los casos? ¿Por qué?
- ¿Cómo son las gráficas que se trazaron?

Preparen la presentación de su trabajo. En equipo decidan cómo lo harán.

Tareas

Resuelve las siguientes actividades en tu cuaderno.

- En una escuela de natación, las cuotas son las siguientes:
Curso intensivo de tres meses: \$1 200
Curso intensivo de cinco meses: \$2 000
Curso regular de ocho meses: \$3 200
 - Encuentra una expresión algebraica y traza una gráfica que muestre la relación entre la duración del curso y el monto por pagar.
 - Observa la gráfica. ¿Cuánto costará tomar un curso que dure un año?
 - ¿Cuánto costará tomar un curso de un año y medio?
 - ¿Es útil esta información para saber el costo de tres años? ¿Por qué?
 - Es proporcional la relación entre la duración del curso y el costo? ¿Por qué?
- La gráfica de la derecha muestra la relación entre las edades de Gilberto y Concepción.
 - ¿Cuántos años tendrá Gilberto cuando Concepción tenga 11 años?
 - ¿Cuántos años tenía Gilberto cuando nació Concepción?
 - ¿Es proporcional la relación entre las edades de Gilberto y Concepción? ¿Por qué?
- Si voy al cine, pago \$45 de entrada y \$25 por cada golosina o bebida que consuma:
 - ¿Cuánto pagaré por un refresco, unas palomitas y un chocolate? ¿Cuánto si no consumo nada?
 - Haz una gráfica que relacione el número de golosinas con la cantidad por pagar y escribe una expresión algebraica que represente la relación.



¿Es proporcional la relación? ¿Cómo se ve esto en la gráfica? ¿Y en la expresión algebraica?

Comenta tus respuestas en clase. Si tienes dudas, pide ayuda al maestro.

Presentación de nuestro trabajo

Reúnete con tu equipo y presenten a sus compañeros los resultados de sus mediciones.

- Comenten cómo hicieron la tabla y cuáles son las variables en cada caso.
- Expliquen qué representan sus expresiones algebraicas y muestren sus gráficas.

Comenten en grupo las diferencias que encuentran entre las gráficas y detecten si hay errores. En caso de que los haya, deberán corregirlos.

¿Cómo nos fue?

- ¿De cuántas maneras puedes representar una relación funcional?
- ¿Cómo es una expresión algebraica que representa una relación de proporcionalidad? ¿Y una tabla de datos? ¿Y una gráfica?
- ¿Cómo son las gráficas que representan las pulsaciones?

Tablas y expresiones algebraicas de variación cuadrática

Contenido

Representación tabular y algebraica de relaciones de variación cuadrática, identificadas en diferentes situaciones y fenómenos de la física, la biología, la economía y otras disciplinas.

Fábrica de electrodomésticos

En parejas, lean la siguiente información y contesten en su cuaderno.

Los ingresos mensuales de un fabricante de electrodomésticos, restando el costo de producción, están dados por la siguiente tabla que relaciona el número de productos fabricados con el ingreso en pesos:

Número de productos	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
Ingreso (\$)	0	225	400	525	600	625	600	525	400	225	0

- ¿Cuánto es el ingreso si se fabrican 15 productos? ¿Y si se fabrican 40?
- ¿Para qué cantidad de productos se obtiene la mayor cantidad de ingresos?
- ¿Es proporcional la relación entre el número de productos y el ingreso? Argumenten su respuesta.
- ¿Cómo describirían con palabras la variación que sufre el ingreso a medida que el número de productos aumenta?

Comparen sus respuestas con las del resto del grupo y coméntenlas con el maestro. Juntos, lleguen a conclusiones.

A lo largo de las actividades regresarán a trabajar con estas preguntas. Antes, lean la información del proyecto que realizarán durante la secuencia.

Nuestro trabajo

Para esta secuencia, en parejas, elegirán una **función cuadrática** y a partir de ella realizarán una **tabla de datos**.

- Deben incluir al menos ocho valores para x y escribir los valores correspondientes para y .
- Al finalizar, intercambiarán sus tablas con otra pareja en el salón de clases y deberán escribir la función que corresponde a la misma.

Durante la secuencia en los apartados "¿Cómo vamos?", encontrarán instrucciones que deberán seguir para la elaboración de su tabla. También encontrarán información acerca de las funciones cuadráticas.

Funciones cuadráticas

Retomen el problema inicial y respondan.

- ¿A partir de qué cantidad de productos el fabricante empieza a tener pérdidas?
- Reflexionen. ¿Cómo pueden determinar los ingresos para cualquier cantidad de productos, por ejemplo 12?
- ¿Qué tipo o de qué forma es la expresión algebraica que representa la situación?

Comenten sus conjeturas con otros compañeros y válidenlas con el profesor.

Ahora, observen la tabla y respondan.

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
y	27	18	11	6	3	2	3	6	11	18	27

- ¿Qué sucede con los valores de y conforme aumentan los valores de x ? _____
- Si el valor de x aumenta al doble, ¿los valores correspondientes de y aumentan de la misma forma? Justifiquen su respuesta. _____
- ¿Es posible representar la relación entre x y y mediante una ecuación de la forma $y = ax + b$? _____ ¿Por qué? _____
- ¿Cuál es el valor de y cuando x vale 6? _____ ¿Y si x es igual a -6? _____
 - ¿Cómo obtuvieron las respuestas? _____
- Escriban, con palabras, una regla que permita, a partir de los valores de x , obtener los de y en esta tabla. _____
 - Ahora, escriban la regla de correspondencia entre x y y de manera algebraica mediante una función. $y =$ _____
- Comparen la ecuación que acaban de escribir con la de algunos compañeros. ¿Es igual? ¿En qué difieren? _____

Comenten las similitudes y diferencias en grupo y lleguen a conclusiones.

Retomen la expresión que obtuvieron en la página anterior y resuelvan.

- Para comprobar si la expresión algebraica funciona, sustituyan cinco valores de x en la expresión ($x = -5, x = -2, x = 0, x = 1, x = 3$ y $x = 5$), obtengan los correspondientes de y y compárenlos con los que aparecen en la tabla.
 - ¿Son los mismos? Si es necesario, corrijan la expresión hasta que encuentren una que permita obtener los valores correctos para y .
 - ¿Por qué son los mismos valores de y para valores de x positivos y negativos (por ejemplo en el caso de 5 y -5)? _____

En la expresión algebraica que representa la situación anterior, la variable independiente (x) se encuentra elevada al cuadrado. Decimos que estas expresiones algebraicas son de **variación cuadrática** y les llamamos **funciones cuadráticas**.

- En la ecuación anterior, ¿cuál es el valor de y cuando x vale 10? ¿Y cuando x vale 100? _____
- ¿A qué valor de y corresponde un valor de x igual a 20? ¿Y si x vale cero? _____
- ¿Es posible que el valor de y sea cero en esta función? ¿Por qué? _____

Una función cuadrática puede tener la forma $y = x^2 + c$, donde c puede ser una constante positiva, negativa o cero.

Ahora supongan que tenemos una relación funcional entre x y y dada por $y = 3x^2 + 4$. Completen la tabla que asocia los valores de x y y , después contesten.

x	$y = 3x^2 + 4$
-4	52
	31
-2	16
-1	
0	
1	
	16
3	31
	52

- ¿A qué valor de y corresponde un valor de x igual a 10? _____
- ¿Son proporcionales los valores de x y de y ? ¿Cómo lo saben? _____
- ¿De qué manera afectó el 3 a los valores de y ? ¿El 3 hace crecer los valores de y de la misma manera que los hace crecer el exponente de x ? ¿Por qué? _____

Comparen sus respuestas con las de otros compañeros y corrijan de ser necesario. Si surgen dudas, coméntenlas con el maestro.

Observen que las funciones cuadráticas también pueden tener la forma $y = ax^2 + c$, donde a es una constante distinta de cero y c puede ser cualquier número.

¿Cómo vamos?

Reúnete con tu compañero para escribir una función cuadrática de la forma $y = ax^2 + c$.

- Elijan el valor de a entre los números 1, 2, -1 , -2 .
- Elijan el valor de c entre los enteros del 1 al 5, ya sean positivos o negativos.
- Utilicen la función que escribieron para hacer la tabla de datos que incluya al menos 8 valores para x y para y .
- Incluyan valores positivos y negativos para x . Incluyan también el cero.

Los electrodomésticos

Regresemos al problema del fabricante de electrodomésticos de la actividad inicial. Analicen nuevamente la tabla y respondan.

- Al aumentar el número de productos fabricados, ¿siempre aumenta el ingreso? Justifiquen su respuesta. _____
- ¿Puede representarse la relación entre el número de productos y el ingreso mediante una ecuación lineal de la forma $y = mx + b$? ¿Por qué? _____
- ¿Qué tipo de ecuación puede utilizarse para representar la relación entre el número de productos y el ingreso? _____
- Si x es el número de productos y y representa el ingreso, elijan una función que relacione a x con y de entre las siguientes:
 - $y = x^2 - 250$
 - $y = 50x - x^2$
 - $y = 50x^2 - x$
 - $y = -x^2 - 50x$
- Prueben la fórmula con al menos cuatro valores de x en la tabla para ver si corresponde al problema. Cambien de fórmula si es necesario.
- Utilicen la fórmula para encontrar los ingresos para 24 y 32 electrodomésticos. _____
- ¿Para qué valor de x se obtiene el mayor ingreso? _____
- ¿Qué pasa si se fabrican más de 50 electrodomésticos, por ejemplo 60? ¿Cómo se puede interpretar este resultado? _____

Como acaban de ver en el problema de los electrodomésticos, las funciones cuadráticas también pueden ser de la forma $y = ax^2 + bx$, con a y b constantes. La **expresión general** para las ecuaciones cuadráticas es $y = ax^2 + bx + c$.

Tareas

1. Completa las siguientes tablas y escribe una función cuadrática que represente la relación entre la variable x y la variable y para cada caso.

x	y	x	y	x	y
-5	-25	-5	30	-5	125
-4	-16	-4	21		80
-3		-3		-3	45
-2	-4	-2	9	-2	
-1	-1	-1		-1	5
0	0	0	5	0	0
	-1	1	6		5
2			9	2	20
3	-9	3	14	3	
4		4			80
5	-25	5	30	5	

- Describe en el cuaderno la estrategia que seguiste para determinar la función en cada caso.

Verifica en clase tus funciones y compáralas con las de tus compañeros. Lleguen en grupo a conclusiones y escribanlas en el cuaderno.

2. En el cuaderno, elabora una tabla para las siguientes funciones. Incluye diez valores no consecutivos para x . En todos los casos incluye también el 0.

a) $y = x^2 + 4$ b) $y = 2x - 1$
 c) $y = x^2 - x - 1$ d) $y = -x^2 + x + 2$

- ¿Cuánto vale y cuando x vale cero en cada caso?

a) $y =$ _____
 b) $y =$ _____
 c) $y =$ _____
 d) $y =$ _____

Compara tus respuestas con el grupo. Si tienes dudas, coméntalas con el maestro.

Un proyectil en movimiento

En forma individual, lee la siguiente información y contesta.

Un físico modeló el movimiento de un proyectil que se lanzaría desde cierta altura. Para ayudarse, realizó las siguientes tablas donde relacionó la altura a la que llegaría el proyectil con el tiempo que le tomaría hacerlo, en dos diferentes lanzamientos.

	Lanzamiento 1						
Tiempo (segundos)	0	1	2	3	4	5	6
Altura (metros)	18	17.5	16	13.5	10	5.5	0

	Lanzamiento 2								
Tiempo (segundos)	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Altura (metros)	32	31.5	30	27.5	24	19.5	14	7.5	0

- ¿A cuál de las siguientes funciones corresponde cada tabla? _____

• $y = 36x^2 + \frac{1}{4}$ • $y = \frac{1}{4}x^2 + 36$
 • $y = -\frac{1}{2}x^2 + 18$ • $y = \frac{1}{2}x^2 - 18$
 • $y = -\frac{1}{2}x^2 + 32$ • $y = 32x^2 - \frac{1}{4}$

- ¿De qué altura se lanzó el proyectil en el lanzamiento 1? ¿Y en el 2? ¿Cómo lo sabes? _____

- ¿Cuántos segundos tardó en llegar al piso el proyectil en cada caso? _____

- A partir de la expresión $36x^2 + \frac{1}{4}$, determina los valores correspondientes a y , a partir de los valores de x .

x	-6	-3	-1	0	1	4	7	9
y								

- Elabora en tu cuaderno las tablas correspondientes a las otras funciones que no elegiste. Utiliza diez distintos valores para x , positivos y negativos.

Compara tus respuestas con las de tus compañeros y corrigan sus errores en caso de que los haya. Si tienen dudas, pidan ayuda al maestro.

¿Cómo vamos?

Reúnete con tu compañero para continuar con el trabajo del proyecto.

- Intercambien su tabla con alguna otra pareja. Recuerden que deben encontrar la función cuadrática de la forma $y = ax^2 + c$ que corresponda a la tabla que recibieron de sus compañeros. Las siguientes preguntas pueden ayudarles.
- ¿Cuánto vale y cuando x vale cero? ¿Qué valor (a o c) se obtiene?
- ¿Los valores de y son todos positivos o negativos? ¿Esto qué puede decir acerca del signo de a y c ?
- Registren la ecuación que corresponde a la tabla de sus compañeros para presentarla al final a todo el grupo.

Las bacterias

Resuelvan en equipo las actividades.

El número de bacterias s en un plato de comida refrigerada está dado por la expresión algebraica $s = 20t^2 - 20t + 120$, donde t es la temperatura de la comida en grados Celsius.

- ¿Cuál es la cantidad de bacterias para una temperatura de 10°C ? ¿Y para una temperatura de 5°C ? _____
- ¿A medida que la temperatura disminuye, el número de bacterias también lo hará siempre? Justifiquen su respuesta. _____
- ¿Cuántas bacterias habrá a una temperatura de 0°C ? ¿Y a -5°C ? _____
- En este caso, ¿aumentó el número de bacterias al disminuir la temperatura? ¿Por qué? _____
- Completen la tabla que relaciona la temperatura con el número de bacterias.

Temperatura ($^\circ\text{C}$)	-2	-1.5	-1	-0.5	0	0.5	1	1.5	2
Número de bacterias									

- Cuando la temperatura disminuye, ¿a partir de qué temperatura el número de bacterias empieza a aumentar? _____
- En una relación cuadrática como las que has visto en esta secuencia, cuando una cantidad disminuye, ¿la otra también lo hace? Justifiquen su respuesta. _____

Comenten sus resultados con su profesor y con sus compañeros.

Los corrales

De manera individual, lee la información y resuelve en tu cuaderno.

Un granjero quiere construir un corral rectangular cuyo largo sea 6 metros mayor que el ancho.

- Escribe una función cuadrática que relacione la medida del largo del rectángulo (x) con su área (A).
- Si tu ecuación no es de la forma cuadrática general $y = ax^2 + bx + c$, efectúa las operaciones algebraicas necesarias para escribirla de esa manera.
- ¿Puede el largo del corral medir 3 metros? ¿Por qué?
- Completa la tabla que muestra la relación entre la medida del largo y el área del rectángulo:

Medida del largo (m)		7		11	15	16	18	20	25
Área (m^2)	0		40				216	280	

- Para que se cumplan los requisitos del granjero, el largo del corral debe ser mayor a un cierto número de metros. ¿Cuál es este número?
- ¿Qué medidas debe tener el terreno para que tenga un área de 112 m^2 ?
- Si el granjero cuenta con 60 metros de cerca para construir el corral, ¿qué medidas debe tener? ¿Cómo encontraste los resultados?

Compara tus respuestas y estrategias de solución con las de otros compañeros y válidenlas con el profesor.

Presentación de nuestro trabajo

Preparen la ecuación que corresponde a la tabla de la pareja con la que intercambiaron y realicen lo siguiente.

- Prueben varios valores de x para obtener los de y . Si los valores no coinciden con los de sus compañeros, corrijan la función.
- Enseñen la función que escribieron a la pareja que elaboró la tabla. ¿Coinciden las funciones?
- Si son diferentes, ¿son equivalentes? ¿Por qué?

¿Cómo nos fue?

- ¿Pudiste hacer las tablas y escribir las funciones cuadráticas?
- ¿Cómo le explicarías a un compañero de primero de secundaria qué es una función cuadrática?
- ¿En qué actividades de la vida cotidiana, además de los ejemplos presentados, piensas que tienen aplicación las funciones cuadráticas?
- Una expresión de la forma $ax^2 + bx$, ¿corresponde a una función cuadrática? Justifica tu respuesta.
- ¿De qué formas pueden representarse ecuaciones cuadráticas?

Características de los eventos de un experimento aleatorio

Contenido

Conocimiento de la escala de la probabilidad. Análisis de las características de eventos complementarios y eventos mutuamente excluyentes e independientes.

Los valores de la probabilidad

Resuelvan el problema en equipos.

Durante un experimento se lanzan dos monedas al aire para adivinar un resultado.

- ¿Cuántos resultados posibles hay en el experimento?
- ¿Cuál es la probabilidad de obtener dos soles?
- ¿Cuál es la probabilidad de obtener un águila y un sol?
- ¿Cuál es la probabilidad de obtener dos águilas?
- Si en el primer lanzamiento se obtienen dos soles, ¿el resultado determina la probabilidad del segundo lanzamiento?

Comparen sus respuestas con las de otro equipo y validenlas en grupo.

Antes de continuar con el trabajo del contenido, lean la información del proyecto que trabajarán en las actividades de la secuencia.

Nuestro trabajo

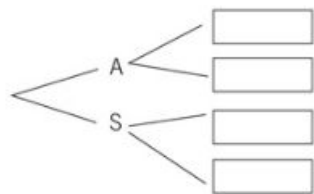
En equipos, deberán definir diferentes experimentos aleatorios y buscarán ejemplos de **eventos mutuamente excluyentes**, **complementarios** e **independientes**. Deberán determinar la probabilidad de cada evento.

- Pueden utilizar distintos materiales: fichas de colores, dados, barajas españolas o monedas.
- A lo largo de la secuencia, obtendrán la información para realizar su proyecto y en los apartados "¿Cómo vamos?" encontrarán las indicaciones necesarias.

La escala de la probabilidad

Retomen la actividad inicial y resuelvan.

- Elijan una de las siguientes representaciones para determinar todos los posibles resultados del experimento. La letra A representa águila y la S, sol.



	A	S
A		
S		

© SANTILLANA

El espacio muestral de un evento aleatorio es el conjunto de todos los posibles elementos. Los subconjuntos del espacio muestral se llaman **eventos** o **sucesos**. La medida de que un evento o suceso ocurra se representa con un número fraccionario, decimal o un porcentaje y se llama **probabilidad del evento o suceso**.

- Completen el espacio muestral E con los posibles resultados de lanzar dos monedas al aire:
 - $E = \{ \text{_____} \}$
- Completen los siguientes subconjuntos o eventos del espacio muestral.
 - Evento M, obtener 2 águilas: $M = \{ \text{_____} \}$
 - Evento Q, obtener 2 soles: $Q = \{ \text{_____} \}$
 - Evento R, obtener un águila y un sol: $R = \{ \text{_____} \}$
- Completen la tabla, determinen la probabilidad de cada evento.

Probabilidad	Fracción	Número decimal	Porcentaje
P(M)			
P(Q)			
P(R)			

- Representen en la recta numérica la probabilidad de cada evento. Respondan.

 - ¿Entre qué números naturales se encuentra la probabilidad de todos los eventos del experimento?
 - Al lanzar dos monedas al aire, ¿la probabilidad de algún evento puede ser mayor que 1? ¿Por qué?
 - ¿Cuál es la probabilidad de obtener el número 6 al lanzar dos monedas al aire? Explica el resultado.

Validen sus respuestas con las de sus compañeros.

Se llama **evento o suceso imposible** a aquel cuya probabilidad de ocurrir es igual a 0, y **suceso seguro** a aquel cuya probabilidad de ocurrir es igual a 1. Por ello, la escala de probabilidad de un evento aleatorio está entre 0 y 1.

- Busquen en distintos medios frases en las que se usen las siguientes expresiones: *es posible, casi seguro, imposible, es probable, es seguro, se espera que, es casi imposible, no se sabe,...*

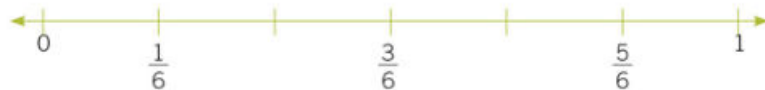
Ordenen en el cuaderno los enunciados o frases según la seguridad de que ocurra el evento o suceso que se menciona. Justifiquen su decisión.

© SANTILLANA

Tareas

Resuelve en el cuaderno.

1. Escribe un experimento aleatorio y define los eventos de tal manera que sus probabilidades sean las que aparecen en la siguiente escala.



- a) Escribe cada probabilidad como número decimal y como porcentaje.

Presenta y explica tu evento aleatorio al grupo para comprobar si tus razonamientos fueron correctos. Si surgen dudas, pidan ayuda al maestro.

Eventos mutuamente excluyentes

Resuelvan en equipos las actividades.

- Determinen el espacio muestral de lanzar un dado. $E = \{ \quad \quad \quad \}$
- Analicen los siguientes eventos, que corresponden al lanzamiento de un dado:

$$A = \{1, 2\} \quad B = \{4, 5, 6\}$$

- ¿Existe algún elemento del evento A que esté en B?
- ¿Los eventos A y B pueden ocurrir al mismo tiempo? Justifiquen su respuesta.

A los eventos A y B se les conoce como **eventos mutuamente excluyentes**.

- Escriban en su cuaderno, con sus palabras, de acuerdo con lo analizado, las características de dos eventos mutuamente excluyentes.

En un experimento aleatorio, se lanzan dos dados al aire, uno de color verde y otro azul.

- Tracen en su cuaderno un diagrama de árbol o una tabla con el espacio muestral del experimento.
- Completen cada evento. Después respondan en su cuaderno.

- Evento D: la suma de los números es igual a 6. $D = \{ \quad \quad \quad \}$
- Evento E: en el dado azul cae el 6. $E = \{ \quad \quad \quad \}$
- Evento F: en el dado verde cae el 6. $F = \{ \quad \quad \quad \}$

- ¿Los eventos D y E pueden ocurrir al mismo tiempo?
- ¿Dichos eventos son mutuamente excluyentes? ¿Por qué?
- ¿Los eventos E y F son mutuamente excluyentes? ¿Por qué?

Validen sus respuestas con las de otros equipos. En caso de haber algún error, corríjanlo. Juntos registren en su cuaderno una conclusión.

© SANTILLANA

- Analiza si los eventos G y H son mutuamente excluyentes. Justifica tus respuestas.
 - Evento G: la suma del resultado de lanzar dos dados es menor que 10.
 - El evento H: la suma del resultado de lanzar dos dados es mayor o igual que 10.

Explica tus razonamientos al resto del grupo. Validen sus respuestas con ayuda del maestro.

¿Cómo vamos?

Reúnanse en equipos para trabajar en su proyecto.

- Determinen el experimento aleatorio con el que van a trabajar y escriban el espacio muestral correspondiente.
- Después escriban dos eventos o sucesos posibles mutuamente excluyentes y dos eventos que no cumplan con esa condición. Determinen la probabilidad de cada uno y representen los resultados en una recta numérica.
- En cada caso, escriban una explicación de por qué los eventos elegidos son o no mutuamente excluyentes.

Eventos complementarios

Organizados en equipos, resuelvan el siguiente problema.

Retomemos el experimento aleatorio del lanzamiento de dos dados.

Evento M: la suma de ambos dados es menor que 7.

Evento N: la suma es mayor o igual que 7.

- Describan los elementos de cada evento.
 - $M = \{ \quad \quad \quad \}$
 - $N = \{ \quad \quad \quad \}$

- ¿Algún elemento del evento de M pertenece a N? Justifiquen su respuesta.

- Escriban la probabilidad de cada evento como número fraccionario.

$$P(M) = \quad \quad P(N) =$$

- Suma de las probabilidades obtenidas. $P(M) + P(N) = \quad +$

Cuando dos eventos de un experimento aleatorio cumplen con lo anterior, se les llama **eventos complementarios** y se escriben: $M^c = N$.

- Escriban con sus palabras una definición de *eventos complementarios*.
- Si conocen la probabilidad de que ocurra M, ¿cómo pueden calcular la probabilidad de que ocurra N?

Presenten la resolución del problema y validen sus resultados con el grupo.

© SANTILLANA

Resuelvan los siguientes problemas en su cuaderno.

- Las calificaciones de Matemáticas en un grupo de treinta alumnos se distribuyen de la siguiente manera:

Calificaciones	Hasta 5.0	Entre 6.0 y 6.9	Entre 7.0 y 10.0
Alumnos	2	8	20

- Si se elige un alumno al azar, calcula la probabilidad de que su calificación no se encuentre entre 6.0 y 6.9.
- Una embotelladora de agua tiene una máquina que llena las botellas con un litro del líquido. Algunas botellas se llenan más de lo necesario y a otras les falta líquido. Se elige una muestra aleatoria de 1 000 botellas.
 - Completen la tabla.

Evento	Llenado	Número de botellas	Probabilidad
A	Menos de 1 litro	16	
B	1 litro	960	
C	Más de 1 litro	24	

- ¿Cuál es la probabilidad de que una botella contenga más o menos de 1 L?

Revisen los resultados en clase, identifiquen los errores y corrijanlos.

Eventos independientes

Resuelve con un compañero los siguientes problemas.

Se tiene una urna con dos bolas blancas y dos negras. Se extrae una bola al azar que resulta ser blanca. Se devuelve a la urna y se saca una segunda bola.

- ¿Cuál es la probabilidad de que la segunda bola extraída sea blanca? _____
- ¿Que la primera bola sea blanca afecta la probabilidad de que la segunda también lo sea? ¿Por qué? _____
- Elaboren en su cuaderno el diagrama de árbol del experimento. Determinen la probabilidad de cada evento y respondan.
 - Cada que se extrae una bola, ¿cuántas bolas de cada color hay en la urna?
 - En la primera extracción, ¿cuál es la probabilidad de que la bola sea blanca?
 - ¿Cuál es la probabilidad de que la segunda bola sea blanca?
 - ¿Cambia la probabilidad de que la segunda bola sea blanca si la primera fue blanca? ¿Por qué? Argumenten su respuesta.

Comparen sus respuestas con las de otra pareja. Si tienen dudas, pidan ayuda al maestro.

Dos o más **eventos** aleatorios son **independientes** si el hecho de que ocurra uno no afecta la probabilidad de que suceda el otro.

¿Cómo vamos?

Retomen el experimento propuesto para su proyecto y realicen lo que se pide.

- Definan dos eventos complementarios y dos que no lo sean.
- En cada caso, escriban una explicación de por qué son o no complementarios.
- Definan dos eventos independientes y dos eventos que no lo sean.
- Expliquen en cada caso por qué son o no independientes.
- Trabajen en la parte final de su proyecto y preparen su presentación.

Resuelvan los siguientes problemas en el cuaderno.

- Analicen si los eventos son o no independientes. Justifiquen sus respuestas.
 - a) Experimento aleatorio: Lanzamiento de un dado.
El evento A está formado por los números pares.
El evento B está integrado por los números menores o iguales a 4.
 - b) Experimento aleatorio: Lanzamiento de una moneda.
El evento A ocurre cuando sale sol (S).
El evento B ocurre cuando sale águila (A).
- ¿Es necesario que los eventos sean mutuamente excluyentes para que sean independientes? ¿Por qué?
- Una familia tiene un hijo varón y espera un segundo hijo. ¿El sexo del segundo hijo está condicionado por el sexo del primer hijo?

Revisen sus respuestas en grupo y corrijan errores.

Presentación de nuestro trabajo

Presenten sus ejemplos de eventos mutuamente excluyentes, complementarios e independientes al grupo.

- Expliquen por qué sus ejemplos cumplen con las características en cada caso.
- ¿En alguno de los ejemplos presentados, los eventos independientes no cumplen la condición de ser mutuamente excluyentes? Si es el caso, analicen ese ejemplo.
- ¿Hay ejemplos de eventos mutuamente excluyentes que a su vez sean complementarios? Si se dieron casos, analícelos.

¿Cómo nos fue?

- De los eventos mutuamente excluyentes, los complementarios y los independientes, ¿cuáles consideras más difíciles de identificar? ¿Qué dificultades tuviste para identificarlos?
- ¿Los eventos independientes tienen que ser necesariamente mutuamente excluyentes? ¿Por qué?
- Da un ejemplo, diferente de los trabajados en esta secuencia, de eventos que no son mutuamente excluyentes y son independientes.

Contenido

Diseño de una encuesta o un experimento e identificación de la población en estudio. Discusión sobre las formas de elegir el muestreo. Obtención de datos de una muestra y búsqueda de herramientas convenientes para su presentación.

Las mochilas y la salud

En equipos, analicen la información, discutan las preguntas y escriban los acuerdos a los que lleguen.



El peso que cargan los estudiantes en sus mochilas puede ocasionarles problemas de salud.

En años recientes se han realizado estudios diversos acerca de los problemas de salud que presentan los estudiantes por cargar demasiado peso en sus mochilas y adoptar posturas inadecuadas; la consecuencia de ambas prácticas se manifiesta, sobre todo, en frecuentes dolores de espalda.

Debido a que los niños y jóvenes están en edad de crecimiento, el peso que cargan, por ejemplo en las mochilas, no debe exceder 10% de su peso corporal, ya que un peso mayor podría derivar en serios daños a la columna vertebral, como deformaciones estructurales permanentes.

Fuente: "Estudio descriptivo sobre el uso de la mochila escolar I". Prof. Ramón Cruz del Moral, María Luisa Zagalaz Sánchez e Inmaculada Rodríguez Marín, España.

Tomado de: www.scribd.com/doc/12479415/El-Uso-de-La-Mochila-Escolar (consulta: 23 de diciembre de 2016, 12:55 horas)

- ¿Qué tipo de problemas de salud puede ocasionar el hecho de cargar en la espalda mochilas con mucho peso?
- Si quisieran realizar un estudio sobre este tema, ¿cuál sería el propósito de dicho estudio?
- ¿Qué información tendrían que recabar?
- ¿Cómo recopilarían la información que necesitan analizar?
- ¿A quién estudiarían?
- ¿Estudiarían a toda la población o elegirían una parte de esta?
- ¿Qué tipo de datos se obtendrían? ¿Cómo los organizarían?
- ¿Qué tablas o gráficas serían las más convenientes para presentar y analizar la información?
- ¿Qué entienden por población y muestra?

Comenten sus respuestas con el resto del grupo y con el maestro.

Antes de continuar con el tema, lean la información referente al proyecto que realizarán a lo largo de la secuencia.

Nuestro trabajo

Reunidos en equipos de cuatro o cinco integrantes, realizarán un **estudio estadístico** sobre la violencia escolar, en particular acerca del *bullying*.

- Si consideran que existe otro problema más importante que quieran investigar, pueden hacerlo.
- A lo largo de las actividades de la secuencia, encontrarán una guía para llevar a cabo el estudio estadístico que hayan elegido.
- Una vez que tengan las conclusiones, cada equipo presentará su estudio, con las tablas y gráficas de los datos recabados y los resultados obtenidos.

A lo largo de la secuencia encontrarán más información para llevar a cabo su estudio estadístico.

Pasos para realizar un estudio estadístico

Analicen los pasos que se siguieron para realizar el estudio sobre el peso de las mochilas.

Paso 1. Delimitación y definición del problema

El exceso de peso en las mochilas es un problema de salud pública entre los escolares de educación básica porque acarrea consecuencias irreversibles en la columna vertebral. La finalidad de este estudio es que las autoridades educativas adquieran conocimientos en lo que al cuidado de la espalda se refiere, para que lo transmitan a sus alumnos.

Paso 2. Determinación de las variables de estudio y elaboración de la encuesta

Para la recolección de datos se realizó una encuesta mediante un cuestionario con la siguiente información: grado escolar, edad, sexo, uso de mochila con o sin llantas, peso corporal, peso de la mochila y comprobación de que el peso de la mochila es igual o superior a 10% del peso corporal.

Además de estos datos, se agregó una pregunta que debían contestar todos los estudiantes entrevistados: ¿Te suele doler la espalda?

Las mediciones de peso se realizaron solo a los alumnos que transportaban su material escolar en mochila y se tomaron a la misma hora y con la misma báscula. La pregunta sobre el dolor de espalda se formuló antes de pesarlos.

- Identifiquen las variables estadísticas en el estudio del uso de la mochila escolar y contesten.
 - ¿Cuáles son variables cualitativas y cuáles cuantitativas? _____
 - _____
 - _____
- Discutan y definan una manera de diferenciar las variables cualitativas de las cuantitativas.

Comparen sus respuestas con las de sus otros compañeros. Si surgen dudas, coméntenlas con el maestro para aclararlas.

Glosario

estudio estadístico. Un estudio es estadístico cuando es posible realizar un análisis de los resultados obtenidos en términos de su representatividad.

¿Cómo vamos?

Reúnanse en equipos para empezar a trabajar en su proyecto.

Investiguen en diferentes fuentes bibliográficas, impresas o documentos de Internet, sobre el tema que hayan elegido para su proyecto.

- Por ejemplo, el significado de *bullying*. Delimiten el problema que van a tratar en su proyecto.
- Utilicen documentos de organismos mexicanos o internacionales conocidos.
- Escriban un texto con los aspectos que consideren explicar qué es *bullying* y cómo se manifiesta.
- Luego determinen qué aspectos del *bullying* estudiarán en su colegio.
- Pueden consultar las siguientes páginas de Internet:

INEE. *Disciplina, violencia y consumo de sustancias nocivas a la salud en escuelas primarias y secundarias de México*. www.inee.edu.mx/index.php/76-publicaciones/recursos-y-procesos-escolares-capitulos/578-disciplina-violencia-y-consumo-de-sustancias-nocivas-a-la-salud-en-escuelas-primarias-y-secundarias (consulta: 23 de diciembre de 2016, 13:06 horas).

SEP. *Escuela Segura. ¿Qué es el bullying?*. www.youtube.com/watch?v=gBZTStdpYg (consulta: 23 de diciembre de 2016, 13:10 horas).

Tareas

1. Investiga lo siguiente y anota tus resultados:

- ¿Qué características deben tener las preguntas abiertas y cerradas que se utilizan en un cuestionario? ¿Por qué? _____
- ¿Cuál es número ideal de preguntas que se debe hacer en un cuestionario? _____
- ¿Qué son las escalas nominales o por intervalos que se usan en los cuestionarios? _____

Compara tus respuestas con las de tus compañeros de equipo. Después, coméntenlas con el resto del grupo y lleguen a conclusiones.

Muestra estadística

Lean y consideren la información para su proyecto.

Paso 3. Determinación de la muestra

Existen estudios que son imposibles de realizar a toda una población. Por ejemplo, si se quisiera saber el total de habitantes mexicanos que cuentan con Internet en su casa, resultaría poco eficaz, dado su tamaño, someter a estudio a la población completa. En estos casos se utiliza una **muestra de la población**, es decir, una parte de los individuos que la conforman. Para que los resultados del estudio se puedan extender a todos los habitantes, la muestra debe ser representativa de la población, tanto en cantidad como en características. Se sugiere que las muestras consideren por lo menos 10% de la población. En cuanto a los elementos de una muestra, una manera sencilla de seleccionarlos es realizar un **muestreo aleatorio**. Se determina un porcentaje y después se eligen al azar los elementos de la población.

Glosario

muestreo aleatorio.

Los elementos de la muestra son seleccionados por procedimientos al azar o con probabilidades conocidas de selección. Por tanto, es imposible determinar el grado de representatividad de la muestra.

¿Cómo vamos?

Retomen su proyecto y hagan lo siguiente.

- Identifiquen las variables estadísticas que van a investigar en el estudio del *bullying* o del tema que hayan elegido.
- Analicen y elaboren el tipo de preguntas que más conviene realizar para cada variable a estudiar.
- Determinen cuál será la población a estudiar y obtengan la muestra a la que le aplicarán la encuesta.

Pasos a seguir, tercera parte

Paso 4. Organización, presentación y análisis de la información

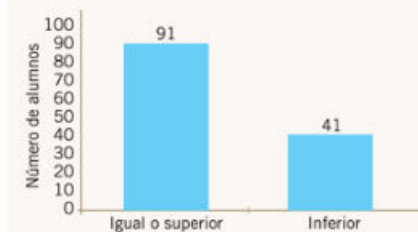
Una vez que se clasificaron las respuestas de los alumnos en dos grupos, los que usan mochila y los que usan carrito, se analizaron los datos de los primeros.

- En este análisis se obtuvieron el peso corporal mínimo, el peso de la mochila y el promedio de cada uno de ellos, como se muestra en la siguiente tabla:

Peso	Peso mínimo	Peso máximo	Promedio
Peso corporal (kg)	18.0	78.5	44.515
Peso de la mochila (kg)	1.0	10.0	5.239

- Expliquen con sus palabras la información que proporciona la tabla.
- Discutan cuál fue el procedimiento utilizado para obtener los datos de la tabla.
- Con los datos anteriores se calculó el porcentaje del peso de la mochila con respecto al peso corporal, y se realizó la gráfica que se muestra.

Gráfica 1. Número de alumnos que usan mochilas cuyo peso es igual, superior o inferior a 10% del peso corporal

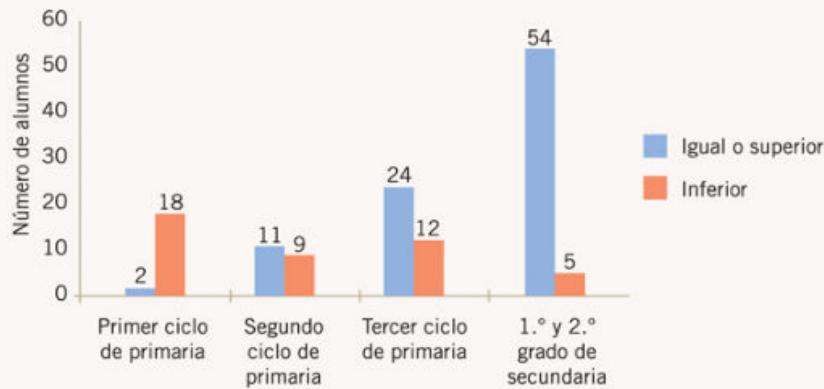


Fuente: "Estudio descriptivo sobre el uso de la Mochila Escolar I". Prof. Ramón Cruz del Moral, María Luisa Zagalaz Sánchez e Inmaculada Rodríguez Marín, España.

- ¿Cómo se calculó el porcentaje que representa el peso de la mochila en relación con el peso corporal?
- Una vez calculado el porcentaje que representa el peso de la mochila con respecto al peso corporal, ¿cómo clasificarían los datos?

Después, se clasificaron los datos del porcentaje del peso de la mochila con respecto al peso de cada alumno por ciclo escolar, resultando los siguientes datos.

Gráfica 2. Número de alumnos por ciclo escolar que usan mochilas cuyo peso es igual, superior o inferior a 10% del peso corporal



- ¿Cómo clasificarían estos datos para obtener información acerca de este porcentaje en relación con los alumnos de cada ciclo escolar?
- ¿Qué tipo de gráfica les convendría utilizar para representar esta información?

Con respecto a las respuestas que dieron los alumnos en relación con el dolor de espalda, se contabilizaron del total de niñas y niños a los que duele la espalda. Luego hicieron lo mismo pero por ciclo escolar y organizaron los datos en tablas como las siguientes:

Tabla 2. Relación entre el dolor de espalda y el sexo del alumno		
	Les duele la espalda	No les duele la espalda
Número de niños	27	43
Número de niñas	36	26

Tabla 3. Relación entre el dolor de espalda y el ciclo de estudios		
	Les duele la espalda	No les duele la espalda
1.º ciclo de primaria	0	18
2.º ciclo de primaria	11	8
3.º ciclo de primaria	18	18
1.º y 2.º grados de secundaria	34	25

- Representen los datos de las tablas 2 y 3 mediante diferentes tipos de gráficas y decidan cuál es la que mejor describe la información. Argumenten su respuesta.

Compartan sus resultados con sus compañeros y resuelvan sus dudas.

¿Cómo vamos?

Terminen su proyecto y preparen su presentación.

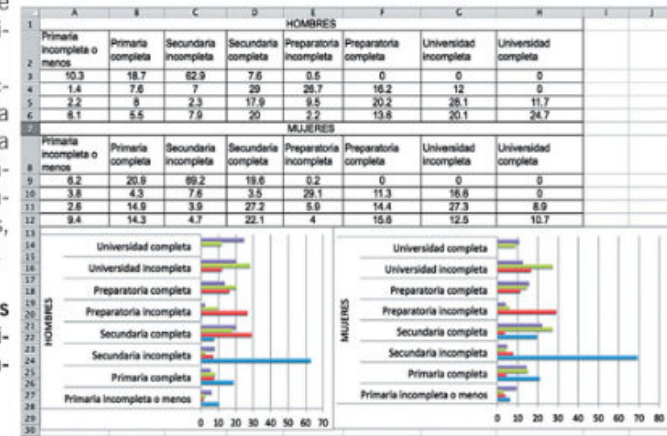
- Decidan qué tipo de gráficas van a utilizar para representar la información obtenida en su estudio.
- Con base en las tablas y gráficas que han creado, redacten un informe que contenga los resultados de su estudio.

Espacio tecnológico

Para elaborar las tablas y gráficas de tu estudio estadístico, puedes utilizar una hoja de cálculo.

- Abre una hoja de cálculo electrónica y escribe los datos de la tabla, y en "Gráfico", selecciona "Gráfica de barras". Traza la gráfica de manera que sea comparativa entre hombres y mujeres, como se muestra en el ejemplo.

Compara tu trabajo con el de tus compañeros. Si tienes dudas o dificultades pide el apoyo de tus compañeros y profesor.



Presentación de nuestro trabajo

Cada equipo presente al grupo el estudio que realizó. Expliquen a sus compañeros los siguientes aspectos de su estudio:

- ¿Qué tema eligieron? ¿A qué población dirigieron el estudio? ¿Cómo escogieron la muestra? ¿Cuántas preguntas abiertas y cuántas cerradas incluyeron?
- ¿Qué tipo de datos obtuvieron? ¿Cómo los organizaron y clasificaron? ¿Qué tipo de tablas o gráficas decidieron utilizar?

Comenten con los demás compañeros y con el maestro los resultados o conclusiones a que llegaron, así como las dificultades a que se enfrentaron.

¿Cómo nos fue?

- ¿Qué utilidad tienen los resultados obtenidos en el estudio que realizaron?
- ¿En qué problemas de tu vida cotidiana o de tu comunidad consideras que sería útil realizar un estudio estadístico?

Evaluación tipo PISA

UNIDAD: La feria

En la feria hay un juego llamado "Chicos y grandes". Su tablero es como el que se muestra a continuación.

Chicos					7	Grandes				
2	3	4	5	6		8	9	10	11	12

El juego se lleva a cabo de la siguiente manera:

En cada partida, los jugadores colocan una o varias fichas en un número, ya sea de los "chicos" o de los "grandes", el 7 no juega.

El encargado del juego lanza dos dados y suma los puntos obtenidos. Si la suma de los dados es un número "chico", ganan los jugadores que hayan colocado fichas en alguno de esos números y quienes eligieron números "grandes", pierden sus fichas. En el caso contrario, si las caras de los dados suman un número "grande", quienes eligieron números "chicos" perderán sus fichas. Si la suma da 7, todos pierden.

Pregunta 1: LA FERIA

Contexto: Público

Aprendizaje esperado: Explica la diferencia entre eventos complementarios, mutuamente excluyentes e independientes.

En los primeros tres lanzamientos, la suma de los dados fue 4. ¿Cuál es la probabilidad de que en el cuarto lanzamiento la suma sea 4?

a) $\frac{1}{36}$

b) $\frac{1}{12}$

c) $\frac{1}{9}$

d) $\frac{1}{4}$

Pregunta 2: LA FERIA

Contexto: Público

Aprendizaje esperado: Explica la diferencia entre eventos complementarios, mutuamente excluyentes e independientes.

Si se realizan cuatro lanzamientos, ¿el resultado del quinto lanzamiento se verá afectado por los obtenidos en los lanzamientos previos? Justifica tu respuesta.

Pregunta 3: LA FERIA

Contexto: Público

Aprendizaje esperado: Explica la diferencia entre eventos complementarios, mutuamente excluyentes e independientes.

Carolina quiere colocar el mismo número de fichas en uno de los números "chicos" y en uno de los números "grandes", ya que asegura que como son eventos complementarios, por lo menos no perderá. Explica por qué Carolina tiene o no razón.

© SANTILLANA

UNIDAD: Los dados de colores

Varios niños juegan lanzando dos dados: uno negro y uno blanco.



En cada tirada, a los puntos obtenidos en el dado negro se le restan los del dado blanco.

Considera los siguientes eventos:

Evento A: La diferencia es un número negativo.

Evento B: La diferencia es un número positivo.

Evento C: La diferencia es un número par.

Evento D: La diferencia es un número par y positivo.

Pregunta 1: LOS DADOS DE COLORES

Contexto: Escolar

Aprendizaje esperado: Explica la diferencia entre eventos complementarios, mutuamente excluyentes e independientes.

En una tirada, Gladis eligió el evento A. Escribe el evento que es el complemento del elegido por Gladis y justifica tu respuesta.

Pregunta 2: LOS DADOS DE COLORES

Contexto: Escolar

Aprendizaje esperado: Explica la diferencia entre eventos complementarios, mutuamente excluyentes e independientes.

Jesús afirma que de los eventos mencionados, solo dos son independientes y Eneida dice que únicamente dos eventos son mutuamente excluyentes. ¿Quién tiene razón? Argumenta tu respuesta.

- a) Jesús
- b) Eneida
- c) Ambos
- d) Ninguno

Pregunta 3: LOS DADOS DE COLORES

Contexto: Escolar

Aprendizaje esperado: Explica la diferencia entre eventos complementarios, mutuamente excluyentes e independientes.

En una tirada, Eduardo y Alan eligieron eventos diferentes. ¿Es seguro que, en cualquier caso, alguno de los dos gane? Justifica tu respuesta.

© SANTILLANA

Bloque 2

Como resultado del estudio de este bloque temático se espera que:

- Expliques el tipo de transformación (reflexión, rotación o traslación) que se aplica a una figura para obtener la figura transformada. Identifique las propiedades que se conservan.
- Resuelva problemas que impliquen el uso del teorema de Pitágoras.



Barco de vela

En el siglo IX a. de C. se inventó la vela triangular para la navegación. Esta vela superó a la cuadrada porque hacía posible cambiar de posición fácilmente y recibir el viento desde distintos lados, lo que permitía tener mayor control sobre la nave y mejores condiciones para navegar.

Contenido

Uso de ecuaciones cuadráticas para modelar situaciones y resolverlas usando la factorización.

El puesto de cojines

Reúnete con dos compañeros, analicen la siguiente situación y respondan las preguntas en el cuaderno. Justifiquen sus respuestas.

En un bazar se montó un puesto de cojines bordados típicos de Chiapas. En el puesto se ofrece una promoción para los mayoristas, la cual aplica en la compra de 3 a 25 cojines y está definida por la siguiente expresión:

$$\text{Monto a pagar en pesos} = 120x - x^2$$

- ¿Qué tipo de ecuación representa la expresión anterior? ¿Por qué?
- ¿Qué representa en este caso la variable x ?
- ¿Pueden expresar el monto a pagar como el producto de dos factores?
- ¿Qué representa cada uno de esos factores?
- Escriban una ecuación que represente el monto a pagar de un cliente que gastó \$575. ¿Cuántos cojines compró en este caso?
- Escriban una ecuación que represente el monto a pagar de un cliente que gastó \$896. ¿Cuántos cojines compró en este caso?
- Cuantos más cojines compra un cliente, sin exceder 25, ¿el precio será mayor o menor? ¿Por qué?
- ¿Qué tipo de expresión representan las expresiones que anotaron para los clientes que pagaron \$575 y \$896 respectivamente? Justifiquen su respuesta.

Comparen sus respuestas con las de otro equipo y analicen las ecuaciones que escribieron. Si tienen dudas, consulten al profesor.

A continuación se describe el proyecto en el que trabajarán durante la secuencia.

Nuestro trabajo

En parejas explicarán un **método de solución** que sirva para resolver ecuaciones cuadráticas. Para ello:

- Realizarán una tabla que les ayude a resolver cuatro ecuaciones, las cuales se les mostrarán más adelante.
- Elaborarán en una cartulina, un cartel en el que expongan sus tablas y resultados.
- Al final, las parejas entregarán su tabla al maestro y la comentarán en grupo.

A lo largo de la secuencia aprenderán a resolver ecuaciones cuadráticas, lo que les servirá para elaborar su proyecto. Más adelante encontrarán más indicaciones.

La oferta de cojines

Antes de trabajar en su proyecto, retomen el problema de los cojines. Contesten de manera grupal.

- Si x representa el número de cojines que alguien adquiere, ¿cuánto pagó una persona que compró 10 cojines? _____
- ¿La expresión que representa lo que se paga por la compra de los cojines es una ecuación cuadrática? ¿Por qué? _____

- ¿Qué pueden hacer en la actividad inicial para conocer el número de cojines que se compraron con \$575 y \$896? Justifiquen su respuesta. _____

Seguramente para encontrar las respuestas a las preguntas de la actividad inicial, probaron diferentes procedimientos. Tal vez recurrieron al método de ensayo y error, que si bien resulta efectivo, muchas veces es lento y poco práctico.

Las expresiones que modelan lo que paga una persona que compra x número de cojines, mayor a 3 y menor o igual a 25, es una **ecuación cuadrática** de la forma $ax^2 + bx + c = 0$, donde a , b y c representan números conocidos y x representa la incógnita.

- Para saber cómo resolver este tipo de ecuaciones, realicen las siguientes actividades.
 - En la siguiente ecuación: $x^2 - 3x + 2 = 0$, ¿cuántos valores puede tomar la incógnita? _____
 - ¿Cuántas soluciones creen que tenga la ecuación? ¿Por qué? _____
 - Trabajen con la expresión del lado izquierdo del signo de igual y factorícenla, es decir, expónenla como el producto de dos factores con un término común. _____

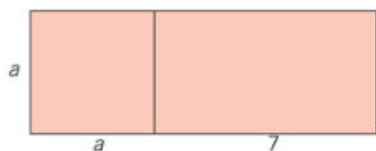
Al factorizar de la manera anterior, se tienen dos factores cuyo producto es cero, eso significa que uno o ambos factores deben ser igual a cero.

- ¿Qué valores puede tomar x para que se cumpla la igualdad? _____
- Sustituyan x por los valores que encontraron para comprobar su respuesta.
 - ¿Se cumple la igualdad? _____

Describan el procedimiento que siguieron para encontrar los valores de x . Comparen sus métodos y resuelvan las dudas que surjan.

Solución por factorización

Analiza el siguiente rectángulo de manera individual y contesta.



- El área del rectángulo es igual a 18 unidades cuadradas y la ecuación que modela la situación es: $a^2 + 7a = 18$.
 - ¿Por qué se puede afirmar lo anterior? _____
- Realiza lo que se indica para encontrar el valor de a en el rectángulo.
 - Escribe la ecuación de manera que todos los términos queden del lado izquierdo de la igualdad y que del lado derecho quede cero.

$$\underline{\hspace{2cm}} = 0$$
 - Factorízala, es decir, escríbela como una multiplicación de dos factores.

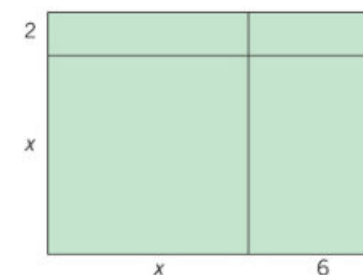
$$(\underline{\hspace{2cm}})(\underline{\hspace{2cm}}) = 0$$
 - ¿Qué se necesita para que el producto de dos o más números sea cero? _____
- Escribe por separado los factores de la ecuación igualados con cero.

$$(\underline{\hspace{2cm}}) = 0 \quad (\underline{\hspace{2cm}}) = 0$$
 - ¿Qué valor debe tomar la incógnita para que el primer factor sea cero?
 - ¿Qué valor debe tomar la incógnita para que el segundo factor sea cero?
 - ¿Cuáles son las soluciones de la ecuación?
 - ¿Cómo las obtuviste?
- Sustituye a por estos valores para corroborar que se cumpla la igualdad.
 - ¿Todas las soluciones de la ecuación son soluciones del problema? ¿Por qué? _____
 - ¿Cuál es la longitud de a ? _____
- Escribe en el cuaderno las siguientes ecuaciones de manera que los términos queden del lado izquierdo de la igualdad, y del lado derecho, cero. Después factorízalas. En caso de que el coeficiente del término cuadrático sea distinto de uno, simplifícala para tener un coeficiente unitario.
 - $y^2 - 24 = -5y$ $n^2 + 4 = 4n$ $16x - 130 = -2x^2$
 - ¿Qué significa que el producto de esos factores sea igual a cero?
- Analiza las ecuaciones, observarás que en todos los casos, el término de la izquierda es una expresión algebraica formada por varios factores. Si es posible, simplifica las ecuaciones para obtener una con la que sea más sencillo trabajar.

Compara tus respuestas con el grupo y válidenlas con el profesor.

Resuelvan en pareja.

- El rectángulo de la derecha tiene un área de 117 cm². Realiza lo que se indica para determinar el valor de x .
 - Escriban una multiplicación de dos factores que represente el área del rectángulo. _____
 - Conviertan la expresión anterior a una ecuación de la forma $ax^2 + bx + c = 0$. _____
 - Ahora, factoricen el lado izquierdo de la igualdad y encuentren los valores de la incógnita. _____
 - ¿Cuál de las dos soluciones resulta válida para el problema? ¿Por qué? _____
- Resuelvan la ecuación $x^2 - 5x + 6 = 0$.
 - Factoricen todo lo que sea posible en la expresión algebraica del lado izquierdo de la igualdad. _____



Debido a que el producto es igual a cero, alguno de los factores debe ser cero. Puede ser cualquiera de ellos.

- Escribe por separado los factores de la ecuación y responde en tu cuaderno.

$$(\underline{\hspace{2cm}}) = 0 \quad (\underline{\hspace{2cm}}) = 0$$
 - ¿Qué valor debe tomar la incógnita para que el primer factor sea cero?
 - ¿Qué valor debe tomar la incógnita para que el segundo factor sea cero?

Por tanto, los valores de x que hacen que alguno de esos factores sea igual a cero, serán solución de la ecuación.

- ¿Cómo puedes comprobar que las dos soluciones propuestas satisfacen la ecuación original? _____
- Ahora simplifica las siguientes ecuaciones. Repite el procedimiento anterior para encontrar las soluciones.

• $2x^2 + 24x + 70 = 0$

• $3x^2 + 6x - 24 = 0$

Comparen sus resultados con los de otros compañeros. Coméntenlos con el profesor y, si tienen errores, corrijánlos.

Ahora resuelve el siguiente problema.

La distancia recorrida por un vehículo en cierto periodo está representada por la ecuación $d^2 + 6d - 50 = 5$, donde d representa dicha distancia.

- Simplifica la ecuación igualando el lado derecho a cero. _____
- Factoriza la ecuación, es decir, reescríbela como factores que se multipliquen entre sí. _____
- Encuentra los valores de d que satisfacen la ecuación. _____
 - ¿Los valores que son solución a la ecuación son solución al problema en términos de distancia? Justifica tu respuesta. _____

La factorización es una herramienta muy útil en la solución de ecuaciones cuadráticas. Una **ecuación igualada a cero** puede factorizarse para igualar a cero cada factor por separado y encontrar el valor o los valores de la incógnita que satisfacen la ecuación. Es importante recordar que las soluciones a una ecuación no siempre son soluciones al problema que esta modela, pues a veces el valor no satisface las condiciones del problema, como sucede en el problema anterior.

Retoma las ecuaciones que factorizaste en la actividad de la página 76 y que se indican a continuación.

- Encuentra la solución o soluciones de todas las ecuaciones.
 - $y^2 - 24 = -5y$ $y_1 =$ _____ $y_2 =$ _____
 - $n^2 + 4 = 4n$ $n_1 =$ _____ $n_2 =$ _____
 - $16x - 130 = -2x^2$ $x_1 =$ _____ $x_2 =$ _____

Compara tus resultados con los de otro compañero. Validen sus conclusiones con el profesor.

El precio de los cojines

Resuelve con un compañero. Escriban las respuestas en su cuaderno.

Retomando la actividad inicial, un cliente pagó \$575 en total. La ecuación que representa esta situación es $120x - x^2 = 575$.

- Escriban la ecuación de manera que quede igualada a cero y simplifiquenla. Después factorícenla y encuentren los valores de la incógnita.
 - ¿Qué representa cada solución en el contexto del problema?
- Si la promoción se aplicara en la compra de cualquier número de cojines, ¿qué cantidad de cojines se podría comprar con la misma cantidad de dinero? ¿Cuánto costaría cada uno? Argumenten sus respuestas.
- Repitan el procedimiento para saber cuántos cojines compró una persona que pagó \$896 en total. ¿Cuántos cojines compró? ¿A qué precio?

© SANTILLANA

- Escriban en su cuaderno una ecuación para cada uno de los siguientes casos y resuélvanla.
 - Si un cliente pagó \$1 100, ¿cuántos cojines compró? ¿Qué precio pagó por cada uno?
 - Si un cliente pagó \$1 296, ¿cuántos cojines compró?, ¿qué monto gastó por cada uno?

Comenten sus respuestas en grupo y, si tienen dudas, pidan ayuda al profesor.

Tareas

Resuelve en el cuaderno.

1. Escribe una ecuación cuadrática que modele cada situación y resuélvela factorizando.
 - a) La altura de un triángulo es 2 metros menor que la longitud de su base. El área es de 12 m². ¿Cuál es la medida de su base y de su altura?
 - b) El lado de un cuadrado es 3 veces mayor que el de otro cuadrado. La suma de sus áreas es de 160 cm². Encuentra las dimensiones de ambos cuadrados.
 - c) Si dos números suman 5, y la suma de sus cuadrados es 53, ¿cuáles son esos dos números?
 - d) ¿Cuáles son las soluciones de la ecuación $x(x - 1) = 12$?

Compara tus respuestas con las de tus compañeros y valida tus procedimientos.

¿Cómo vamos?

Reúnete con tu pareja y lean la información para su proyecto.

- Las ecuaciones con las que trabajarán son las siguientes:
 - $x^2 + 8x = -12$ • $2x^2 - 98 = 0$
 - $x^2 + 3\frac{x}{2} = 1$ • $x^2 - 3x = 3x^2 - 4x$
- La tabla que entregarán debe ser como la siguiente:

Ecuación original	Igualada a cero	Escrita de la forma $ax^2 + bx + c = 0$	Ecuación factorizada	Soluciones

- Hagan su tabla y complétenla para cada ecuación.
- ¿Cómo les ayuda la factorización en el desarrollo del proyecto?
- ¿Pueden resolver las ecuaciones sin factorizarlas?
- ¿Cuántas soluciones esperan encontrar para cada ecuación? ¿De qué depende? ¿Cómo pueden demostrar su afirmación anterior?
- Comprueben cada solución hallada sustituyéndola en la ecuación original.

© SANTILLANA

Al-Khwarizmi, matemático, astrónomo y geógrafo musulmán nacido en el año 720 de nuestra era, escribió un libro de álgebra en el cual resolvía seis tipos de ecuaciones. Las ecuaciones se construyen con tres tipos de cantidades: raíces, cuadrados de raíces y números; esto es, x , x^2 y números. Observa la tabla.

Ecuaciones de Al-Khwarizmi	Expresión actual
Cuadrado igual a raíz	$ax^2 = bx$
Raíz igual a un número	$bx = c$
Cuadrado igual a número	$ax^2 = c$
Cuadrado y número iguales a raíz	$ax^2 + c = bx$
Cuadrado y raíz iguales a número	$ax^2 + bx = c$
Raíz y número iguales a cuadrado	$bx + c = ax^2$

• ¿A qué ecuación de Al-Khwarizmi corresponden las siguientes?

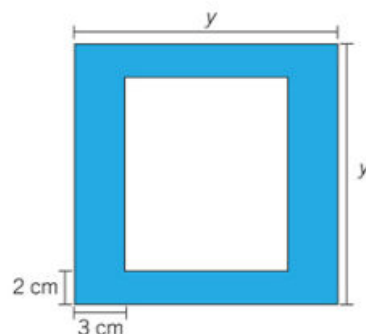
- $3x^2 = 27x$
- $5x^2 = 20$
- $2x^2 - 12 = 10x$
- $x^2 + 14x = -49$
- $9x + 12 = 3x^2$

La tela para los cojines

Reúnete con tu pareja para resolver la siguiente actividad.

Para diseñar los cojines de la actividad inicial, se necesitan dos cuadrados de tela, pero solo el frente se bordará. Para esta parte de cada cojín se toma un cuadrado de tela que mide de lado y centímetros. Se deja sin bordar un margen para el cierre y el dobladillo cuyo ancho es de 2 cm por lado y cuyo largo es de 3 cm por lado, como se muestra en la ilustración.

- Consideren cuatro cojines que tienen 624 cm^2 , 224 cm^2 , 99 cm^2 y 2024 cm^2 de área bordada respectivamente. Encuentren la medida del lado del cuadrado (y) que se necesita para el frente de cada cojín, es decir, del cuadrado que incluye tanto el área bordada como la orilla para coserlo.



- Expresen para cada caso una ecuación que represente el área total del frente del cojín.
- Encuentren para cada caso la o las soluciones que satisfagan la ecuación.
- ¿Todas las soluciones a las ecuaciones son soluciones a la pregunta de la medida del lado de cojines? ¿Por qué? Justifiquen su respuesta y den un ejemplo utilizando las ecuaciones que escribieron.

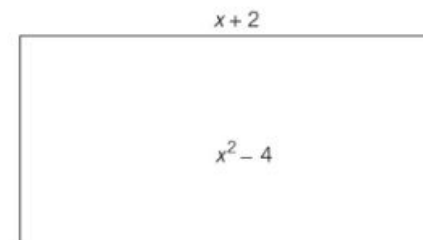
Comparen sus respuestas y sus ecuaciones con las de otros compañeros. Escriban sus conclusiones en su cuaderno.

© SANTILLANA

Tareas

Resuelve en tu cuaderno los siguientes problemas.

1. El rectángulo de la derecha tiene las medidas que se indican.
 - a) ¿Cuánto mide de ancho?
 - b) Si conservara el largo y midiera 96 cm^2 de área, ¿cuál sería el valor de x ?
2. En el grupo 3.º A, la cantidad de niños excede a la de niñas en 7, y se debe elegir un niño y una niña para representar al grupo.



- a) Si en el salón hay x niños, ¿cuántas posibles combinaciones de parejas de un niño y una niña pueden formarse? Escribe la respuesta en términos de x .
- b) Si en total se pueden formar 120 parejas distintas, ¿cuántos niños y cuántas niñas hay en el salón?
3. Resuelve las siguientes ecuaciones con factorización para encontrar el o los valores de la variable x que las satisfacen. Simplifica cuando sea posible.

a) $x^2 - 3x - 10 = 0$	b) $x^2 - 25x = 0$
c) $-4x^2 + 4x = 0$	d) $-8x^2 - 16x = 8$
e) $2x^2 + 4x = -2$	f) $x^2 = 5x$

Comenta tus respuestas con el grupo y resuelve tus dudas con ayuda del profesor.

Presentación de nuestro trabajo

Presenten su cartel a sus compañeros y comparen las explicaciones que cada uno dio para verificar que sean correctas.

- Determinen a cuál de las ecuaciones que aparecen en la sección "Historias de vida" corresponden las ecuaciones de su trabajo.
- ¿El trabajo de su equipo fue distinto a los otros? ¿Por qué?
- ¿Consideran que alguna forma de resolución fue más eficaz que otra? Justifiquen su respuesta.
- ¿Cualquier ecuación cuadrática puede ser resuelta por factorización? ¿Por qué?

Escriban en grupo sus conclusiones sobre lo trabajado en la secuencia y resuelvan las dudas con ayuda del profesor.

¿Cómo nos fue?

- ¿De cuántas maneras sabes resolver ecuaciones de segundo grado?
- ¿En qué casos conviene utilizar el método de factorización para resolver ecuaciones de segundo grado?
- ¿Te parece sencillo este método? ¿Por qué?
- ¿Crees que el método de factorización es el más adecuado para resolver el caso de los cojines?

© SANTILLANA

Rotación y traslación de figuras

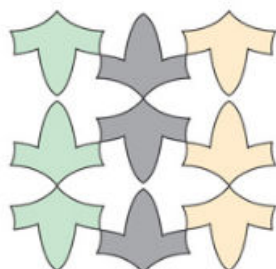
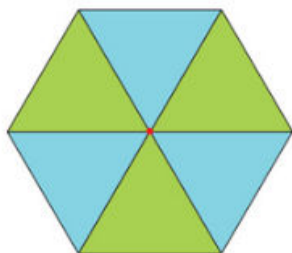
Contenido

Análisis de las propiedades de la rotación y de la traslación de figuras.

Los mosaicos

Lee la información, observa las imágenes y anota tus respuestas en tu cuaderno.

Los recubrimientos de superficies planas con figuras que no se superponen han sido usados por varias culturas (como la musulmana) para elaborar adornos. En segundo de secundaria construiste mosaicos; ahora observa las siguientes imágenes.



- ¿Cuántas figuras diferentes se emplearon en cada mosaico?
- ¿Qué movimientos geométricos puedes identificar?
- Partiendo de una figura base, ¿cómo podrías reproducir los mosaicos anteriores mediante el uso de la geometría?
- ¿Qué entiendes por trasladar o rotar una figura? ¿En qué mosaicos observas estas transformaciones?

Comenta tus respuestas con tus compañeros y tu profesor.

A lo largo de las actividades regresarás a revisar este problema. Antes, lean en equipo la información del proyecto que realizarán durante la secuencia.

Nuestro trabajo

En equipo, elaborarán un cartel en el que explicarán las propiedades de la rotación y la traslación.

- Sigán las instrucciones del profesor y formen su equipo de trabajo.
- En el cartel deberán describir cómo identificar una traslación o una rotación de una figura plana.
- Cada descripción deberá ilustrar paso a paso el movimiento de la figura.

A lo largo de la secuencia diseñarán el cartel y al final lo expondrán al resto del grupo. Durante la secuencia encontrarán más información en los apartados "¿Cómo vamos?".

Algunos movimientos de figuras

En cursos anteriores has estudiado algunas transformaciones geométricas. En esta secuencia trabajarás con algunas de sus propiedades.

Para empezar, encontraremos los movimientos que se hicieron para obtener los mosaicos mostrados en la actividad de inicio.

Analiza el mosaico de la derecha y responde.

- ¿Cuál es la figura mínima empleada? _____
- Imagina que copias la figura de color blanco, la recortas y la superpones en la figura original. ¿Qué movimiento debes hacer con esa figura para obtener todas las de la misma fila? _____
- A partir de esa primera posición, ¿qué movimiento debes hacer para obtener las figuras blancas de la segunda fila? _____



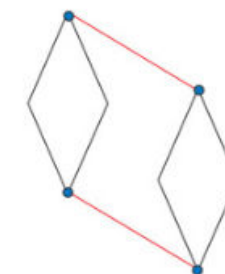
Intercambia tus respuestas con un compañero. Luego respondan.

- ¿Qué tipo de movimientos usaron (rectilíneos, circulares, etcétera)? _____
- ¿Cambió el sentido del movimiento en cada caso? ¿Por qué? _____
- ¿Qué orientación tomó la figura después de hacer cada movimiento? _____
- ¿Qué nombre le darían a ese movimiento? _____
- Observen la forma, el tamaño y la orientación de la figura empleada y su relación con las demás obtenidas con el movimiento. ¿Qué propiedades se mantienen? _____

Comparen sus respuestas con sus compañeros y lleguen a acuerdos con base en argumentos geométricos.

Cuando se hace un movimiento en línea recta que deja las figuras con la misma orientación en la que estaban antes de moverse se dice que se hizo una **traslación**.

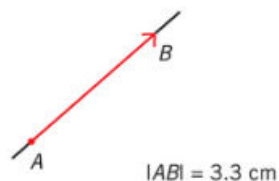
- Regresa a la página anterior y encuentra, en las tres imágenes, las figuras que sean resultado de traslaciones de una figura en el plano. Determina, en cada caso, cuánto se desplazó la primera figura para obtener la segunda (toma como modelo la primera figura del extremo superior izquierdo de cada mosaico).
- Selecciona varios puntos de la figura original y únelos con sus correspondientes de la segunda mediante segmentos de recta, como se muestra en el ejemplo de la derecha.
- ¿Qué observas? ¿Qué relación hay entre las líneas que trazaste? _____



Comenta tus respuestas con tus compañeros y el profesor. Explica cómo llegaste a ellas.

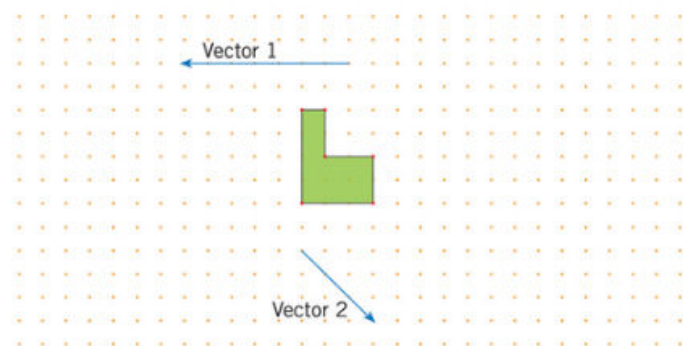
Traslaciones

Lee la siguiente información y realiza las actividades.

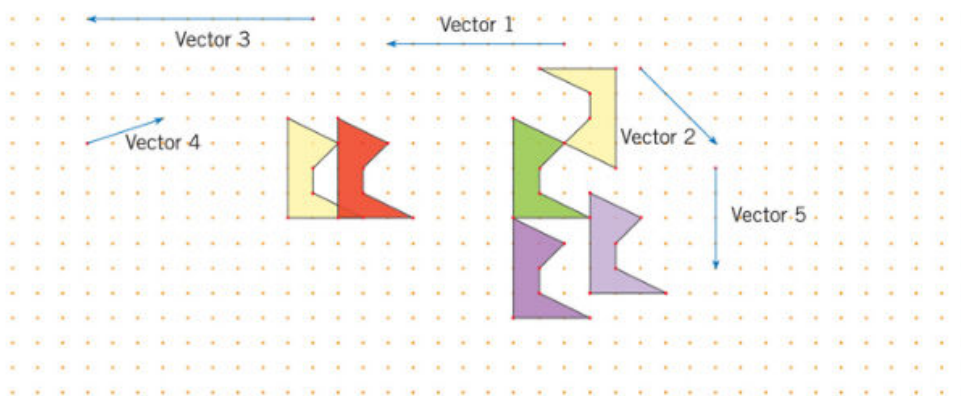


En matemáticas llamamos **vector** al segmento de recta (en el ejemplo, AB) que tiene **magnitud**, **dirección** (determinada por la recta que lo contiene) y **sentido** (indicado por la punta de la flecha) definidos.

La siguiente imagen muestra un polígono y dos vectores. Estima en qué parte de la cuadrícula quedará la figura resultante de aplicar la traslación según el vector 1. Luego señala dónde quedará la figura resultante de aplicar la traslación según el vector 2.



En la siguiente figura, establece la correspondencia entre el polígono verde (figura inicial) y las figuras que son resultado de una traslación. Para ello, indica cuál es el vector en cada caso. Identifica las figuras que no sean resultado de una traslación y explica por qué no lo son. Escribe las respuestas en tu cuaderno.

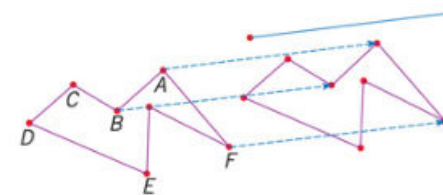


Comenta con tus compañeros qué estrategias usaste para hacer las traslaciones.

- Analiza las imágenes de la actividad inicial, considera aquellas en que se haya usado la traslación para obtener el mosaico y marca los vectores mediante los cuales se hizo la transformación. Compara tus trazos con los de otros compañeros.

© SANTILLANA

En grupo, y con ayuda de su profesor, planteen una definición de "traslación de figuras en el plano" que les permita identificar esta transformación. Utilicen la imagen de la derecha para ilustrar su definición.



Tareas

Haz las siguientes actividades y registra tus respuestas en tu cuaderno.

1. Consulta la definición de "traslación" y "rotación geométrica en el plano". ¿Se relacionan estas definiciones en otros contextos en los que se utilizan estos términos?
2. Investiga acerca de aplicaciones de estas transformaciones geométricas y preséntalas en la siguiente clase. Coméntalas con tu profesor y tus compañeros.

¿Cómo vamos?

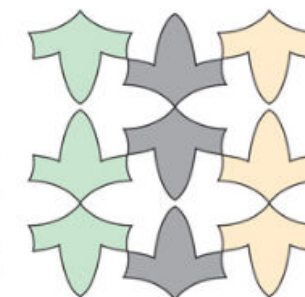
Reúnete con tu equipo y decidan cómo organizarán la información que van a presentar.

- Distribuyan las responsabilidades en la búsqueda de los ejemplos de cada movimiento.
- Con base en lo trabajado en clase y lo consultado en la tarea, escriban qué es la traslación.

Más movimientos en el plano

Analiza la imagen y responde.

Ahora vamos a identificar otros movimientos en el plano. La imagen de la derecha es una de las mostradas en la actividad inicial. Corresponde a un mosaico que se encuentra en el palacio de la Alhambra, en España, y se le conoce como "el avión". Imagina que copias y recortas una figura verde y la superpones en la original.



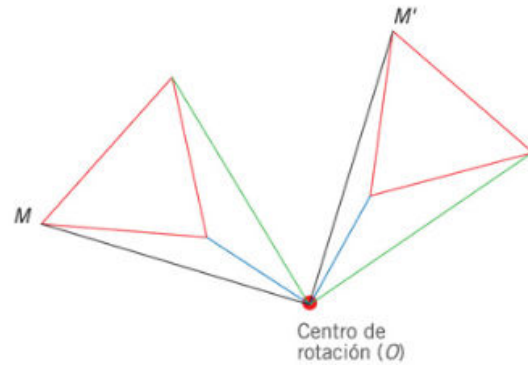
- ¿Qué movimiento debes hacer para obtener la figura negra y la amarilla de la primera fila? _____
- Describe los movimientos. _____
- ¿Qué tipo de movimientos se realizan (rectilíneos, circulares, etcétera) para obtener las figuras negras a partir de la verde? _____
- ¿Qué nombre le darías a ese movimiento? ¿Por qué? _____
- Observa la forma, el tamaño y la orientación de la figura modelo y su relación con las obtenidas con este movimiento. ¿Qué propiedades se mantienen? _____

© SANTILLANA

Reúnete con un compañero e intercambien y analicen sus respuestas.

En pareja, lean la siguiente información y analicen el ejemplo.

Al movimiento que se hace en la figura verde para obtener cualquier figura negra se le conoce como **rotación**. Para rotar una figura, debemos tener un punto sobre el cual se hace el giro (llamado **centro de rotación**) y el valor del ángulo de giro. El centro de giro puede estar fuera o dentro de la figura, incluso en uno de sus lados.



Para trazar una rotación, una vez que se tiene el centro de rotación, se traza un segmento del centro O a uno de los puntos (M), después se mide el ángulo de giro (observa la imagen, en este caso el valor del ángulo es 90°) y se traza la semirrecta que marca dicho ángulo. Se mide la distancia de O a M y se traslada (usando compás o regla) a la otra semirrecta, así obtenemos la rotación de dicho punto (M'). Luego repetimos este procedimiento con los demás puntos de la figura. Observen en la imagen los segmentos del mismo color, que identifican el punto original con el punto rotado.

Para practicar la rotación de figuras, hagan las siguientes actividades.

- Observen el hexágono regular que aparece en la actividad inicial.
 - Si usamos uno de los triángulos como figura inicial, ¿cuál es el centro de rotación y qué ángulos se usan para obtener el mosaico? Argumenten su respuesta.

- En una hoja de papel, tracen un triángulo equilátero.
 - Si se aplica una rotación al triángulo de manera que quede en la posición original, ¿cuál es el ángulo de rotación y sobre qué punto se hace dicha rotación?

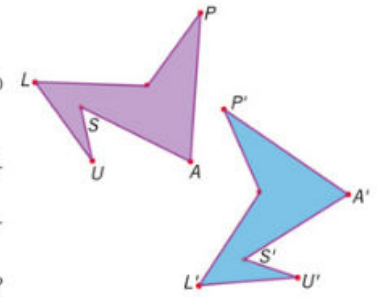
- ¿Cómo se observa el triángulo si se aplica una rotación con ángulos de 90° , 180° , 270° y 360° con centro en el baricentro del triángulo? _____
- ¿Sucede lo mismo si se aplica una rotación con centro en uno de los vértices del triángulo usando los mismos ángulos anteriores? _____
- Repitan la actividad anterior, pero ahora utilicen un cuadrado.
 - Si se usa como centro de rotación el punto de intersección de las diagonales, ¿cuánto debe medir el ángulo de rotación para que el cuadrado resultante quede en la misma posición que el original? _____
 - ¿Varía la medida de este ángulo si el centro de rotación es uno de sus vértices? Explíqueno. _____

Reúnanse con otra pareja, intercambien sus respuestas y lleguen a una conclusión.

Reúnete con tres compañeros y hagan las actividades.

En la imagen de la derecha se muestran dos figuras congruentes que son resultado de una rotación.

- Hagan lo que se indica para determinar el centro y ángulo de rotación.
- Unan dos puntos cualesquiera de la figura original con sus correspondientes homólogos por la rotación.
- Tracen las mediatrices de los segmentos obtenidos y marquen su punto de intersección. Denótenlo O .
- Tracen la mediatriz del segmento que une otro punto y su homólogo. ¿Qué observan? _____
- Ahora unan O con P y O con P' . ¿Cuánto mide el ángulo que se forma entre las dos semirrectas? _____
- Unan otros dos puntos, original y homólogo, con el punto O y verifiquen cuál es el ángulo de rotación.
- En la imagen de la derecha, identifiquen un par de figuras que sean resultado de rotaciones y traslaciones. Justifiquen su respuesta describiendo en su cuaderno cada movimiento.



Comenten con el profesor y con sus compañeros los resultados de las actividades anteriores.

¿Cómo vamos?

Reúnete con tu equipo para finalizar el proyecto.

- Analicen si los trazos elegidos para su cartel ilustran paso a paso los movimientos en el plano.
- Señalen en sus ejemplos dónde está el centro de rotación y el valor del ángulo de giro.
- Revisen sus descripciones.

Presentación de nuestro trabajo

Coloquen su cartel en el lugar indicado por su profesor y expongan su trabajo.

- Inviten a sus compañeros a identificar rotaciones y traslaciones en sus ejemplos.
- Elijan el cartel más creativo e ilustrativo para el tema visto. Tomen en cuenta la claridad de sus descripciones y los ejemplos.

En grupo comenten sus experiencias y registren sus conclusiones acerca del tema trabajado en la secuencia.

¿Cómo nos fue?

- ¿Cómo se diferencia una rotación de una traslación?
- ¿Qué propiedades geométricas son comunes en estas transformaciones?
- ¿Qué aplicaciones, en esta y otras asignaturas, le puedes dar a lo aprendido en esta secuencia?
- ¿Qué pasará con el área y el perímetro de dos figuras que son resultado de una rotación y una traslación dadas? Ilústralo con ejemplo y justifícalo.

Contenido

Construcción de diseños que combinan la simetría axial y central, la rotación y la traslación de figuras.

Diseños geométricos

Observa las imágenes y anota tus respuestas en tu cuaderno.

Las simetrías axial y central, así como las rotaciones y traslaciones están presentes en el arte y en la Naturaleza. A continuación analizaremos algunos ejemplos de simetría. Identifica los textiles en que hay transformaciones geométricas y menciona cuáles son estas.



- ¿Qué características conservan los objetos que son simétricos respecto de un eje? ¿Conservan estas características cuando se aplican traslaciones o rotaciones? Explica tu respuesta.
- ¿Cómo identificas el tipo de transformación geométrica utilizada en un diseño?
- ¿Puedes identificar alguna de estas transformaciones en los objetos que te rodean?

Comenta tus respuestas con tus compañeros y tu profesor. Identifica las propiedades que comparten estos tipos de transformaciones y aquellas en las que son distintas.

A lo largo de las actividades regresarás a trabajar con alguno de estos diseños. Antes, reúnanse en equipo para leer el proyecto que realizarán en la secuencia.

Nuestro trabajo

En este proyecto elaborarán un **diseño**, ya sea construido por ustedes o retomado de uno ya hecho, en el que sean evidentes las transformaciones geométricas: simetría (axial o central), traslación y rotación.

- Sigán las instrucciones de su profesor para formar su equipo.
- Deberán entregar a su profesor una descripción detallada de las transformaciones geométricas que se hacen en su diseño.
- Al final, expondrán al grupo su trabajo. Durante la secuencia encontrarán más información en los apartados “¿Cómo vamos?”.

© SANTILLANA

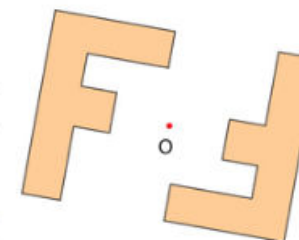
Simetría central

Haz la siguiente actividad y responde.

En grados anteriores has estudiado la simetría axial; en la secuencia anterior, analizamos las propiedades de la traslación y la rotación. Ahora estudiaremos la simetría central.

En la imagen de la derecha se ha aplicado **simetría central** a la letra *F* alrededor del punto *O*.

- Une con segmentos los vértices de la letra original con sus correspondientes en la figura simétrica.
 - ¿Qué observas respecto al vértice de la figura original y su simétrico? _____
 - ¿Qué pasa con el punto *O* y todos los segmentos que unen a cada vértice de la figura original y sus simétricos? _____
 - ¿Cómo es la distancia de los vértices de la figura original al centro de simetría y de ese centro a sus simétricos? _____
 - Reúnete con un compañero, analicen las respuestas y, con base en estas, escriban una frase que defina la simetría central. _____

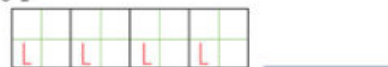


Transformaciones geométricas

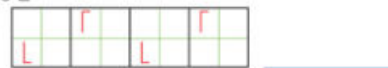
Escribe qué tipo de transformación o transformaciones se hicieron para obtener las figuras resultantes.

Por ejemplo, en el segundo caso: *simetría axial* y *traslación*.

Caso 1



Caso 2



Caso 3



Caso 4



Caso 5



Caso 6



Caso 7



- Reúnete con un compañero, comparen sus respuestas y lleguen a acuerdos sobre las transformaciones geométricas aplicadas en cada imagen.

Presenten al grupo y a su profesor sus resultados y analicen qué transformación fue más sencillo identificar y cuál fue la más difícil. Expliquen por qué.

© SANTILLANA

¿Cómo vamos?

Reúnete con tu equipo y decidan cuál será el tema de su diseño.

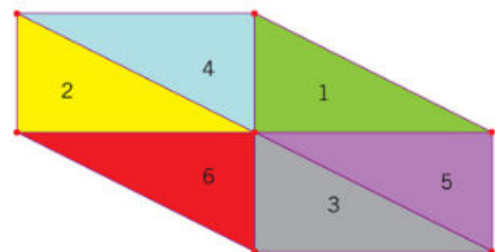
- Acuerden si lo construirán ustedes o retomarán uno ya hecho.
- Con base en lo que han visto, analicen qué figuras de su diseño se pueden obtener por medio de traslaciones.
- Recuerden, de su curso de primero de secundaria, cómo se verifican las propiedades que conservan las figuras simétricas respecto de un eje. No olviden usar simetría central y simetría axial en algunas de sus figuras.

Un reto

En pareja, hagan las actividades y respondan.

En estas actividades hemos trabajado con varios tipos de transformaciones geométricas en las que todas las figuras mantienen su forma y su tamaño. Y si se toman dos puntos cualesquiera (en el original y su imagen) su distancia no cambia, se mantiene constante. Es decir, por medio de estas transformaciones obtenemos figuras congruentes con un modelo proporcionado. A esas transformaciones se les conoce como **isometrías**, y son **traslación**, **rotación**, y **simetría central** y **simetría axial**. El término isometría alude a figuras congruentes en diferentes posiciones.

El siguiente mosaico fue construido moviendo el triángulo 1 a las posiciones 2, 3, 4, 5 y 6 respectivamente.

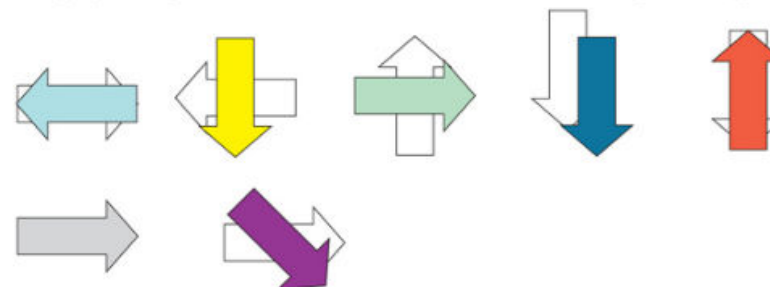


- En la siguiente tabla, indiquen la posición inicial y final del triángulo obtenido a partir de la isometría respectiva.

Isometría	Posiciones consecutivas	Posiciones no consecutivas
Traslación		Posición 1 a posición 3
Rotación		
Simetría central		
Simetría axial		

© SANTILLANA

Seguramente ya han trabajado con procesadores de texto u hojas de cálculo para hacer presentaciones, y conocen una herramienta de dibujo que les permite insertar formas y aplicarle giros. Con esta herramienta se insertaron las siguientes figuras:



- A continuación se describe cada uno de los movimientos hechos con esta herramienta. Completen la tabla y escriban la transformación geométrica que se aplicó.

Figura resultante	Opción del menú	Isometría
Figura azul claro	Voltear horizontalmente	
Figura amarilla	Girar 90° a la izquierda	
Figura verde		
Figura azul oscuro	Copiar y pegar	
Figura roja		
Figura gris	Efecto de sombra	
Figura morada	Girar _____	

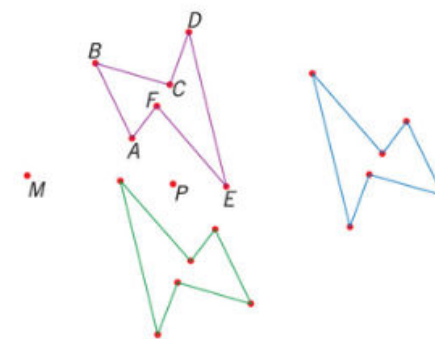
- ¿Qué significa, en términos geométricos, voltear horizontalmente? _____
- ¿Qué significa, en términos geométricos, voltear verticalmente? _____

Con ayuda de su profesor, confronten sus respuestas y analicen esta aplicación de las transformaciones geométricas.

Tareas

Haz las siguientes actividades y escribe las respuestas en tu cuaderno.

1. En la figura, el polígono inicial es $ABCDEF$ y mediante simetría central se obtuvieron los polígonos verde $A'B'C'D'E'F'$ y azul $A''B''C''D''E''F''$. En cada caso, señala el centro de simetría. Si no aparece, encuéntralo. Coloca las letras correspondientes al polígono original en los dos polígonos simétricos. Después traza un nuevo polígono $A'''B'''C'''D'''E'''F'''$ cuyo centro de simetría sea M .



© SANTILLANA

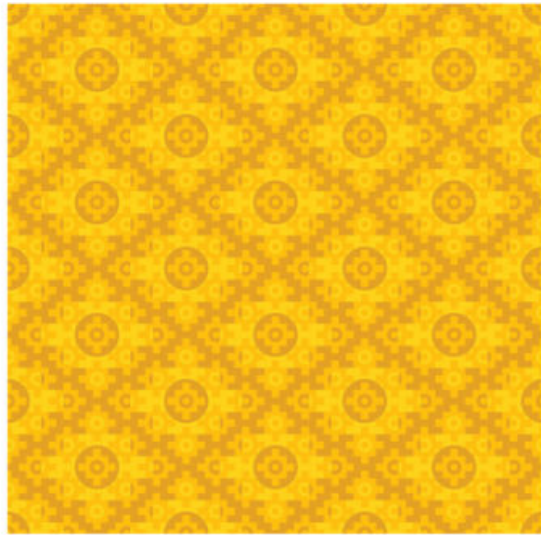
- Dibuja un cuadrado, un rectángulo, un círculo y un triángulo. En cada caso encuentra si hay uno, ninguno o más centros de simetría para obtener una figura simétrica que se superpone a la original.
- Investiga en qué casos una rotación se puede identificar con una simetría. ¿Es simetría central o axial?
- ¿Qué diferencia hay entre una rotación de 180° y una simetría central en la que el centro de rotación coincide con el centro de simetría?
- Compara el área y el perímetro de una figura y su imagen después de aplicar las siguientes transformaciones geométricas: simetría axial, rotación y traslación.

En cada caso, ¿qué pasará con el área y el perímetro? ¿Cambia o es el mismo? Justifícalo usando las propiedades de estas transformaciones.

Presenta tus respuestas a todo el grupo. Recuerda explicar cómo llegaste a ellas.

Transformaciones geométricas

Retoma el siguiente textil de la situación inicial. Analiza el diseño y responde.



- Elige el motivo inicial y señálalo.
 - ¿Qué isometría debes realizar para generar la imagen de la derecha o de la izquierda en la misma fila? _____
 - ¿Qué isometría debes realizar para generar la imagen de otra fila? _____
- En caso de que sea simetría central, identifica el punto inicial. Si es una rotación, identifica el centro de la rotación y el ángulo. Para las traslaciones, identifica el vector y el sentido.

Reúnete con tres compañeros, comparen y comenten sus respuestas. Valídenlas con ayuda del profesor.

En equipo, completen la siguiente información para identificar características de las isometrías en relación con los puntos fijos que tienen al aplicarlas a una figura. Ilustren cada caso con un ejemplo.

A las isometrías que no tienen puntos fijos se les conoce como _____	Las isometrías que tienen un único punto fijo son _____	La simetría axial es la isometría que tiene _____
--	---	---

Tareas

Resuelve las actividades en tu cuaderno.

- La imagen de la derecha es similar a un tablero de ajedrez. El cuadrado marcado con 0 es la figura inicial.
 - ¿Qué tipo de transformaciones se aplicarían al cuadrado 0 para generar los cuadrados del mismo color que están a su alrededor?
 - ¿Qué tipo de transformaciones se aplicarían al cuadrado 0 para generar los cuadrados de diferente color que están a su alrededor?
 - Si usas solo traslaciones, ¿puedes generar las posiciones 1 a 8 a partir del cuadrado 0?
 - Si usas solo rotaciones sobre un vértice del cuadrado 0, ¿puedes obtener los cuadrados de las posiciones 1 a 8?

1	2	3
8	0	4
7	6	5

Presentación de nuestro trabajo

Coloquen su diseño en un lugar visible del salón para que lo aprecie todo el grupo.

- Expliquen a los demás compañeros las figuras que usaron.
- Comenten y ejemplifiquen cuáles isometrías les generaron mayor dificultad al construir su diseño o al identificarlas.

¿Cómo nos fue?

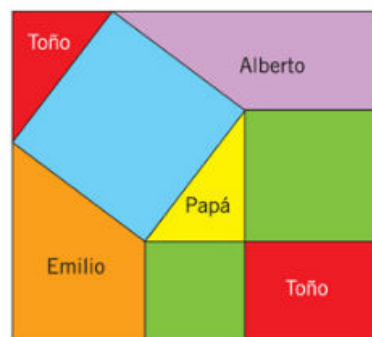
- Según los diseños de todos los equipos, ¿qué propiedades geométricas son comunes a todas las transformaciones que estudiamos? ¿En qué se diferencia una simetría central de una axial? ¿Cómo se diferencia una rotación de una traslación?
- ¿Qué propiedades geométricas son comunes a todas las transformaciones vistas en la secuencia?, ¿cuáles son sus diferencias?
- Imagina que un compañero te pregunta cómo reconocer la traslación, la rotación, la simetría axial y la central en un diseño. Escríbelo e ilústralo con dibujos.
- Redacta un párrafo en el que describas otras aplicaciones de las isometrías.

Contenido

Análisis de las relaciones entre las áreas de los cuadrados que se construyen sobre los lados de un triángulo rectángulo.

Las áreas de los terrenos

En pareja, lean la situación y respondan en el cuaderno. Justifiquen sus respuestas.



El dueño del terreno rectangular que se muestra a la izquierda, ha decidido regalarles a sus cinco hijos los terrenos que rodean su casa (terreno amarillo) de la siguiente manera:
 A Toño le dio los terrenos rojos.
 A Alberto, el morado.
 A Emilio, el anaranjado.
 A sus dos hijas, Laura y María, las quería tener más cerca y les ofreció escoger entre el terreno azul o los dos verdes. Laura y María no saben decidir cuál opción les conviene.

- ¿Cuál terreno tiene mayor superficie: el cuadrado azul o la suma de los dos cuadrados verdes?
- ¿Cómo se pueden comparar las áreas de los terrenos que recibieron los tres hijos?
- ¿Qué información necesitan para poder contestar las preguntas anteriores?
- Tracen en una hoja cuadrículada un triángulo rectángulo con las dimensiones que quieran, los cuadrados correspondientes a sus tres lados y las otras figuras geométricas que completan el terreno rectangular.
- Midan todas las distancias necesarias para poder resolver este problema.

Comparen sus respuestas con las de otros compañeros. Lleguen a acuerdos acerca del procedimiento descrito.

A lo largo de las actividades retomarán este problema. Antes reúnanse con una pareja y lean en qué consiste el proyecto que trabajarán durante esta secuencia.

Nuestro trabajo

En pareja, realizarán una **demostración geométrica** del teorema de Pitágoras.

- Necesitarán un pliego de papel cuadrículado y colores.
- A lo largo de las actividades conocerán en qué consiste el teorema y podrán obtener ideas para hacer una demostración de su inventiva.
- Al final, presentarán su demostración al profesor y al grupo.

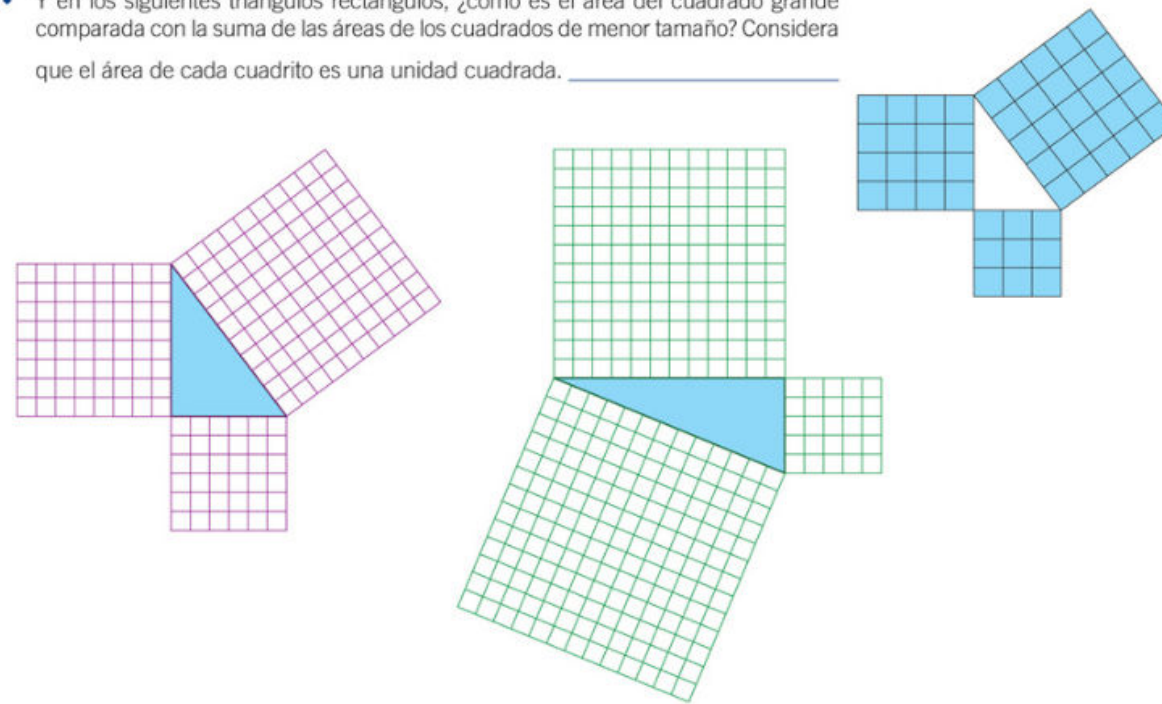
© SANTILLANA

Triángulos rectángulos y cuadrados

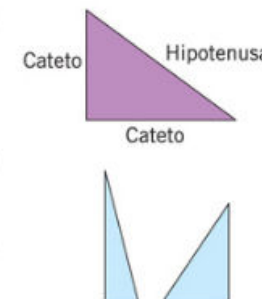
Resuelve de manera individual.

En el dibujo de la derecha, observa que se construyeron cuadrados a partir de los lados de un triángulo rectángulo.

- ¿Cómo es el área del cuadrado grande comparada con la suma de las áreas de los cuadrados de menor tamaño? Considera que el área de cada cuadrado es una unidad cuadrada. _____
- Y en los siguientes triángulos rectángulos, ¿cómo es el área del cuadrado grande comparada con la suma de las áreas de los cuadrados de menor tamaño? Considera que el área de cada cuadrado es una unidad cuadrada. _____



En un triángulo rectángulo, a los lados que forman el ángulo recto se les llama **catetos** y al tercer lado se le llama **hipotenusa**.



- Analiza la siguiente afirmación y explica si es verdadera. Argumenta.
La suma de las áreas de los cuadrados que están sobre los catetos es igual al área del cuadrado que está sobre la hipotenusa.
- Copia los triángulos azules de la derecha en el cuaderno y traza los cuadrados sobre sus catetos y su hipotenusa. Después calcula sus áreas.
 - ¿Se cumple la afirmación? ¿Crees que se cumpla para cualquier triángulo rectángulo? _____

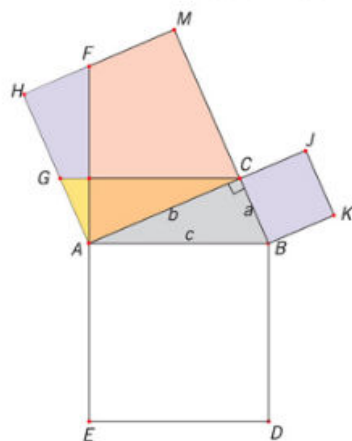
Compara tus respuestas con el grupo y juntos lleguen a conclusiones.

La afirmación anterior se cumple para cualquier triángulo rectángulo y se conoce como **teorema de Pitágoras**. Para estar seguros de que se cumple siempre, hay que demostrarlo.

© SANTILLANA

Demostración geométrica del teorema de Pitágoras

En equipo, hagan lo que se indica. Contesten en el cuaderno.

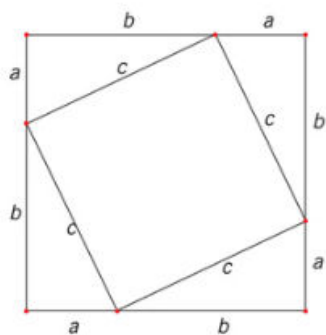


- Tracen en una hoja una figura como la de la izquierda. Utilicen colores.
- Recorten las cuatro piezas de colores que forman el cuadrado ACMH y el cuadrado BCJK.
 - Si el lado AC mide b centímetros, ¿cuánto mide el área del cuadrado ACMH?
 - Si el lado BC mide a centímetros, ¿cuánto mide el área del cuadrado BCJK?
- Acomoden las cinco piezas recortadas dentro del cuadrado ABDE de manera que cubran su superficie completamente.
 - Si el lado AB mide c centímetros, ¿cuánto mide el área del cuadrado ABDE?

Si las cuatro piezas del cuadrado ACMH, junto con el cuadrado BCJK, se pueden acomodar perfectamente para cubrir la superficie del cuadrado ABDE, entonces la suma de las áreas de los cuadrados construidos en los catetos del triángulo es igual al área del cuadrado construido en la hipotenusa del triángulo. De esta manera, **han demostrado geoméricamente el teorema de Pitágoras.**

Demostración algebraica del teorema de Pitágoras

Tracen lo que se indica y contesten en el cuaderno.



- Ahora tracen un cuadrado dentro de otro, como se muestra en la figura.
 - ¿Cómo se puede encontrar el área del cuadrado cuyos lados miden $a + b$?
 - ¿Cómo se puede encontrar el área del cuadrado cuyos lados miden c y que está inscrito dentro del otro cuadrado?
 - ¿Cómo se puede encontrar el área de cada uno de los triángulos rectángulos ubicados en cada esquina?
- Lean lo siguiente, apliquen sus conocimientos de álgebra y completen las igualdades.

Existen dos formas de calcular el área del cuadrado: multiplicando la longitud del lado del cuadrado por sí mismo o calculando el área de los cuatro triángulos y sumarla al área del cuadrado inscrito de lado c .

- Área del cuadrado = lado \times lado = $(a + b) \times (a + b) =$
- Área del cuadrado = área del cuadrado de lado c + área de los cuatro triángulos =
- Igualen los dos resultados anteriores y simplifiquen. Deben obtener una ecuación que relacione los lados a , b y c de los triángulos trazados en el dibujo anterior.

Comparen sus respuestas en grupo y resuelvan las dudas que hayan surgido.

© SANTILLANA

Espacio tecnológico

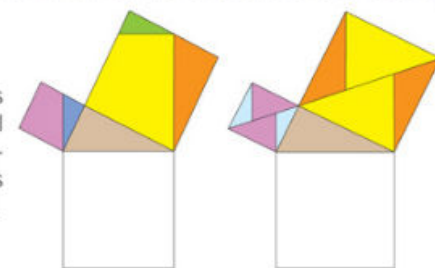
Existen cientos de demostraciones del teorema de Pitágoras. En la siguiente página de Internet encontrarás un video que muestra otra manera de demostrar el teorema: www.youtube.com/watch?v=CAkMUdeB06o (consulta: 23 de diciembre de 2016, 11:39 horas)

- Con la asesoría de tu profesor, reúnete con tus compañeros y construyan un modelo parecido.

Tareas

Resuelve los siguientes rompecabezas pitagóricos.

1. Observa cómo están construidas las partes que componen los cuadrados que se forman tomando como lados los catetos del triángulo rectángulo. Repite los diseños con cartulina, usa plumones de colores, recorta las piezas y decide cómo cubrir con todas las piezas el cuadrado que se forma en un lado de la hipotenusa.

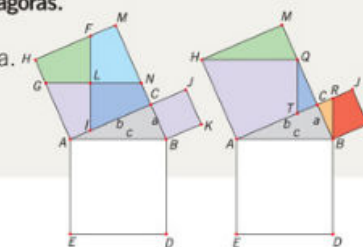


Presenta tu trabajo a tus compañeros y explica tu procedimiento.

¿Cómo vamos?

Reúnete con tu compañero y trabajen en su demostración del teorema de Pitágoras.

- Pueden retomar, si lo desean, los rompecabezas que hicieron de tarea.
- Analicen los dos ejemplos de la derecha para enriquecer sus ideas.
- Investiguen más acerca del tema en otras fuentes.
- Preparen su presentación.



Presentación de nuestro trabajo

Entreguen al profesor su demostración geométrica del teorema de Pitágoras y sigan sus indicaciones para presentarla ante el grupo.

- Compartan sus estrategias de solución.
- Mencionen qué parte de la secuencia les sirvió para desarrollar su demostración y qué otras fuentes utilizaron.
- ¿Las demostraciones de algunas parejas se parecen mucho o son iguales?

¿Cómo nos fue?

- ¿Pudiste construir todos los rompecabezas pitagóricos? ¿Cuáles fueron más difíciles y cuáles más fáciles? ¿Por qué?
- ¿Cuál es la diferencia entre una demostración geométrica y una demostración algebraica?
- ¿Cómo podrías aprovechar los conocimientos adquiridos para resolver el problema inicial? ¿Qué otra aplicación podría tener el teorema de Pitágoras?

© SANTILLANA

Cierre

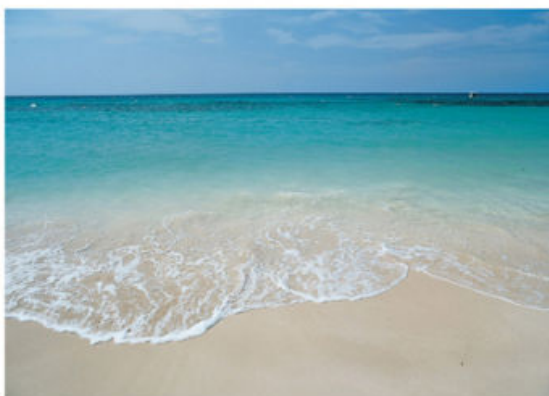
Contenido

Explicitación y uso del teorema de Pitágoras.

La distancia al horizonte

Lee la situación y responde en el cuaderno.

¿Te has preguntado alguna vez qué tan lejos está el horizonte? Imagínate que estás parado sobre la arena de una playa mirando el horizonte y quieres saber cuál es la distancia de tus ojos a esa línea lejana que separa el mar del cielo.



El horizonte en el mar.

- ¿Cómo calcularías la distancia al horizonte?
- Discute con un compañero tu procedimiento para realizar el cálculo anterior y analicen el suyo. Decidan cuál de los dos puede ser más eficiente y por qué.

Compara tu respuesta con la de otros compañeros. A lo largo de la secuencia encontrarás diferentes estrategias para verificar tu resultado.

Lean en qué consiste el proyecto que realizarán durante esta secuencia y los materiales que necesitarán.

Nuestro trabajo

En pareja, construirán **espirales pitagóricas**, como la que se trabaja al final de esta secuencia, y la decorarán para que sea parte de un dibujo.

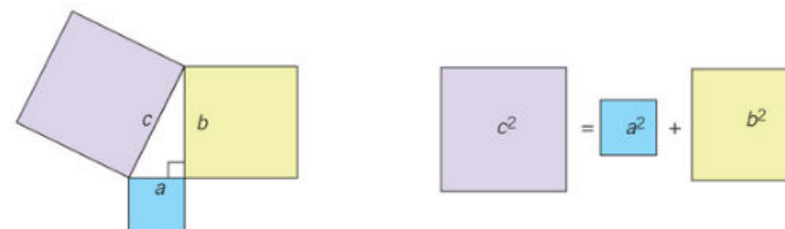
- Pueden ver algunos ejemplos en la siguiente página de Internet: catedu.es/arablogs/blog.php?id_blog=434&id_articulo=79083&comentarios=si (consulta: 23 de diciembre de 2016, 11:40 horas)
- Durante la secuencia encontrarán más información en los apartados "¿Cómo vamos?". Al final, la expondrán al resto de sus compañeros.

© SANTILLANA

Aplicaciones del teorema de Pitágoras

Reúnete con un compañero, lean la información y resuelvan los problemas.

Para cualquier triángulo rectángulo se cumple que el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos, es decir, si a y b son las longitudes de los catetos y c es la longitud de la hipotenusa, entonces $a^2 + b^2 = c^2$. A esta igualdad se le conoce como el **teorema de Pitágoras**.



- Una cancha de fútbol mide 100 metros de largo y 75 metros de ancho. ¿Cuánto mide su diagonal?
 - Describan el procedimiento que siguieron para encontrar el resultado anterior.
- Un arquitecto calcula las dimensiones de una escalera para subir de la planta baja al primer piso de una casa. La altura entre pisos será de 2.72 metros, la base de la escalera es recta y mide 4.16 metros. ¿Cuál será la longitud del barandal que se colocará junto a la escalera?



- Mercedes quiere nadar al otro lado de un río que tiene un ancho de 216 metros. Empieza nadando en dirección perpendicular a la ribera del río, pero la corriente la arrastra de manera que al llegar al otro lado del río se encuentra 63 metros río abajo de donde quería llegar. ¿Cuántos metros nadó?
- ¿Cuál debe ser la longitud de una rampa para discapacitados, si la altura de la banqueta es de 17 centímetros? La norma establece que por cada centímetro de altura se debe tener una distancia horizontal de 16 centímetros.

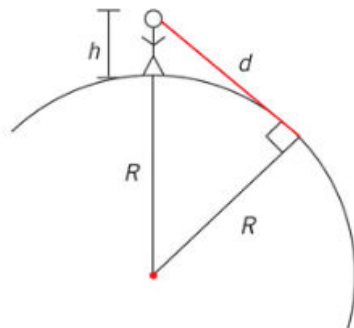
Comparen sus respuestas con las de sus compañeros. En caso de que haya diferencias busquen los posibles errores y corrijan en grupo.

© SANTILLANA

¿Y el horizonte?

Resuelve la actividad.

Retomemos el problema inicial. Antes de comenzar, hagan una lista en el pizarrón de lo que cada uno de los alumnos considera que mide la distancia de la playa al horizonte, en metros o kilómetros, para que después de resolver este problema vean quién estuvo más cerca de la respuesta correcta.



- Observa el dibujo de la izquierda.
 - La distancia de tus ojos al horizonte está representada por el segmento rojo con longitud d .
 - La distancia de tus ojos al piso está indicada por h .
 - R representa el radio de la Tierra. Investiga cuánto mide el radio de la Tierra en metros.
 - Ahora, pide ayuda a un compañero para medir la distancia de tus ojos al piso.
- Observa que el segmento rojo es perpendicular al radio de la Tierra y forma entonces un triángulo rectángulo. ¿Cómo se puede utilizar el teorema de Pitágoras para relacionar las cantidades representadas en el triángulo y resolver este problema?

- Utiliza el teorema de Pitágoras y sustituye los valores conocidos en la ecuación:
 $(\text{radio de la Tierra} + \text{altura de los ojos al piso})^2 =$ _____
 $(\text{radio de la Tierra})^2 + (\text{distancia de los ojos al horizonte})^2 =$ _____
- Completa la tabla. Sustituye diferentes valores de h en la fórmula y escribe tus resultados. Todos los datos deben estar expresados en metros.

R	h	$R + h$	$(R + h)^2$	$=$	R^2	$+$	d^2	d

- Utiliza una calculadora y tus conocimientos de álgebra a fin de encontrar el dato faltante, es decir, la distancia de tus ojos al horizonte (d). Compara tus resultados con los de un compañero.

- Ahora, comparen sus resultados con los de otra pareja. ¿Todos obtuvieron la misma respuesta? ¿De qué depende la respuesta de cada uno? _____
- Si estuvieras parado en la terraza de un hotel mirando hacia el horizonte, el valor de h sería más grande. Completa la tabla con valores mayores para h . Incluye las alturas de las situaciones que se muestran.

R	h	$R + h$	$(R + h)^2$	$=$	R^2	$+$	d^2	d

- ¿Qué tan lejos estaría el horizonte si estuvieras en el piso más alto de un rascacielos, digamos a 100 metros de altura? _____
- ¿Y si estuvieras parado en la cima del Monte Everest, a 8 848 metros sobre el nivel del mar? _____
- ¿Y si lo miraras desde la ventanilla de un avión volando a 10 000 m de altitud? _____

Compara tus respuestas con las de tus compañeros. Corrijan de ser necesario.

Medida de las pantallas

Reúnete con un compañero y resuelvan lo siguiente en el cuaderno.

Sin importar su tamaño, todas las pantallas de televisión estándar tienen la propiedad de que si dividimos la longitud de su base entre la longitud de su altura, el resultado siempre será $4/3$. En otras palabras, la razón que existe entre su base y su altura es de $4:3$.

En las pantallas planas LCD, la razón que existe entre la longitud de su base y la longitud de su altura es de $16:9$. Sin embargo, en la publicidad no suelen presentarse las longitudes de la base o de la altura de la pantalla.

Tanto las pantallas de televisión estándar como las de plasma y LCD se promocionan para su venta indicando en pulgadas la medida de la diagonal. Por ejemplo, una televisión de 22" es aquella cuya pantalla mide 22 pulgadas en diagonal.

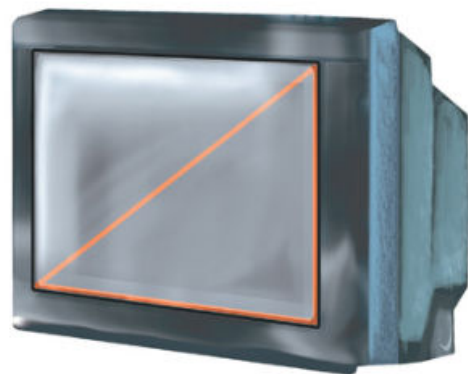


- Si la medida de la base de la pantalla de una televisión estándar es de 72 cm, ¿cuántos centímetros mide la altura de la pantalla? ¿Cuál será la longitud de la diagonal en cm?

- Analicen cada uno de los siguientes pasos.

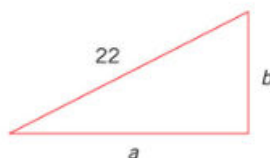
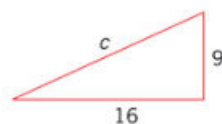
$$\frac{4}{3} = \frac{72}{\text{Altura}} \rightarrow 3 \times 72 \text{ cm} = 4 \times \text{altura} \rightarrow \text{altura} = 54 \text{ cm}$$

Ahora, usamos el teorema de Pitágoras para encontrar la medida de la diagonal.



$$\begin{aligned} \text{base}^2 + \text{altura}^2 &= \text{diagonal}^2 \\ 72^2 + 54^2 &= \text{diagonal}^2 \\ 5\,184 + 2\,916 &= 8\,100 \\ \text{diagonal}^2 &= 8\,100 \\ \text{diagonal} &= \sqrt{8\,100} = 90 \text{ cm} \end{aligned}$$

- Si conocemos la medida de la diagonal de una televisión estándar o de pantalla plana, ¿cómo podemos determinar la longitud de su base y de su altura?
- Si, por ejemplo, la diagonal mide 22 pulgadas y se trata de una televisión LCD de pantalla plana, entonces, como la razón entre sus lados es 16/9, podemos establecer dos triángulos semejantes:

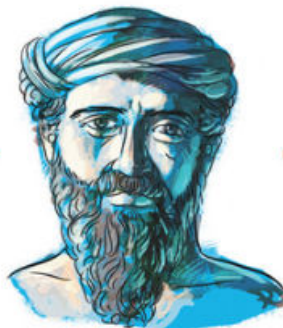


- ¿Cómo pueden encontrar el valor de c en el primer triángulo?
- Si conocen los valores de los tres lados del primer triángulo y saben que ambos triángulos son semejantes, ¿cómo pueden establecer las proporciones correspondientes para encontrar las longitudes a y b del segundo triángulo?

Comenten sus respuestas en grupo. Si tienen dudas, pidan ayuda a su profesor.

Historias de vida

El **teorema de Pitágoras** es uno de los descubrimientos matemáticos más famosos de la historia. Hace aproximadamente 2500 años, Pitágoras demostró que el **área del cuadrado construido sobre la hipotenusa de un triángulo rectángulo es igual a la suma de las áreas de los cuadrados construidos sobre los catetos**. Esta idea ya era conocida unos mil años antes por los babilonios, pero se piensa que Pitágoras fue el primero en demostrarlo.

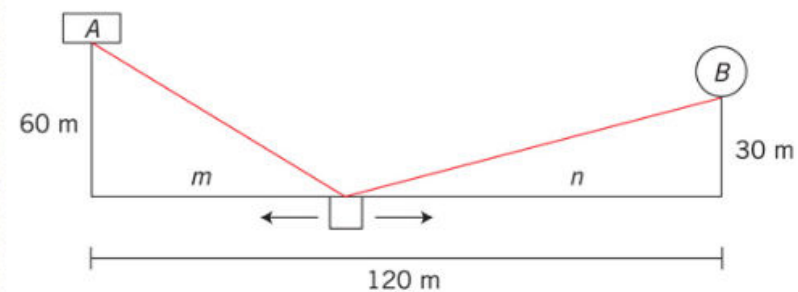


© SANTILLANA

Tareas

Resuelve en el cuaderno. Justifica tus respuestas.

1. El área de un cuadrado es de 81 cm^2 , ¿cuánto mide cada lado y cuánto mide la diagonal?
2. La base de una escalera se coloca a 50 cm de la pared. Si la escalera mide 240 cm, ¿a qué altura del piso esta toca la pared?
3. ¿Cuánto miden el perímetro y el área de un triángulo rectángulo cuyos catetos miden 8 cm y 15 cm?
4. Si un viajero recorre 80 km hacia el norte, 30 km hacia el este y luego 40 km hacia el sur, ¿a qué distancia está de donde comenzó el recorrido?
5. Cada lado de un terreno con forma de triángulo equilátero mide 120 metros. ¿Cuánto mide la altura del triángulo?
6. La entrada a la casa de Laura mide $1.05 \text{ m} \times 2.10 \text{ m}$. Si compró una mesa circular que mide 2.40 m de diámetro, ¿cabrá la mesa por la puerta?
7. La compañía de luz necesita determinar en qué sitio exacto de la calle debe colocar un poste del que se van a conectar dos casas, A y B , de manera que el cable que se use sea de la menor longitud posible para así minimizar su costo. Si la distancia horizontal entre las dos casas es de 120 metros y las casas están a una distancia de 60 y 30 metros, respectivamente, de la calle donde se colocará el poste, ¿en qué lugar deberán colocarlo para que el resultado de la suma de las dos hipotenusas formadas sea el menor posible? Sustituye diferentes valores para m y n , cuidando que sumen 120, y encuentra el punto en donde conviene ubicar el poste de luz.



8. Una catarina caminó de A a B sobre la superficie de un cubo que tiene 10 cm de arista. si la catarina recorrió la distancia más corta posible, ¿cuál fue su trayectoria?



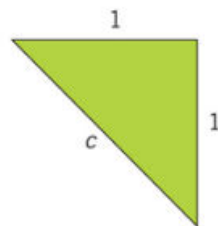
© SANTILLANA

Revisa con el grupo tus respuestas y escribe tus conclusiones en el cuaderno. Si tienes dudas, coméntalas con el profesor.

La espiral pitagórica

Resuelve de manera individual las siguientes actividades.

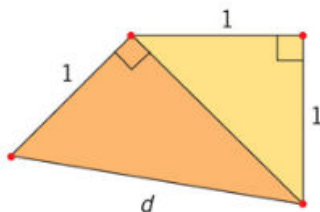
- Traza un triángulo rectángulo isósceles cuyos catetos midan 1 cm. Llama c a la hipotenusa y utiliza el teorema de Pitágoras para encontrar su medida.



- Escribe la ecuación que describe el problema. _____
- ¿Cuánto suman los cuadrados de los catetos? _____
- Si el cuadrado de la hipotenusa es igual a 2, ¿cómo se calcula el valor de la hipotenusa? Por aproximación, encuentra un número que multiplicado por sí mismo dé como resultado el número 2. _____

- Usa una calculadora para comprobar el resultado anterior. ¿Qué operación matemática o qué tecla de la calculadora se usa para encontrar la respuesta? _____

- Dibuja un segundo triángulo rectángulo junto al anterior, como se muestra en la imagen, de manera que la hipotenusa del primer triángulo sea un cateto del nuevo triángulo, y el otro cateto mida 1 cm.



- ¿Cuánto mide la hipotenusa del segundo triángulo? _____
- Explica los pasos siguientes para encontrar la medida de la hipotenusa del segundo triángulo.

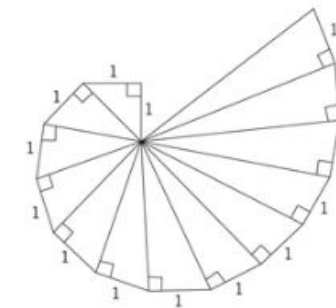
$$1^2 + (\sqrt{2})^2 = d^2 \qquad 1 + 2 = d^2 \qquad 3 = d^2$$

- ¿Cuál es el valor de d ? _____

© SANTILLANA

- Ahora encuentra las medidas de las hipotenusas en la espiral de la derecha, en donde todos los catetos exteriores miden 1.

- ¿Encuentras alguna relación entre sus valores? _____



Para determinar un patrón o una relación entre todas las hipotenusas es importante que no simplifiques y encuentres el valor de las raíces cuadradas.

Comenta tus respuestas y, con ayuda del maestro, resuelve las dudas que hayan surgido.

¿Cómo vamos?

Reúnete con tu compañero de equipo.

- Además de construir la espiral pitagórica anterior para su trabajo, también pueden construir otra empezando con un triángulo rectángulo isósceles cuyos catetos midan 1 cm cada uno; la hipotenusa de este triángulo medirá $\sqrt{2}$. Construyan un segundo triángulo rectángulo isósceles cuyos catetos midan $\sqrt{2}$.
- ¿Cuánto mide la hipotenusa de este nuevo triángulo? Escriban el procedimiento que siguieron para encontrarla.
- Construyan el siguiente triángulo de la espiral tomando como medida de uno de los catetos la longitud de la hipotenusa del triángulo antecesor, repitan el procedimiento hasta construir la espiral.
- Calculen el área de cada uno de los triángulos.
- Hagan sus dibujos a partir de las espirales que trazaron y preparen su presentación.

Presentación de nuestro trabajo

Muestran al grupo sus espirales pitagóricas.

- Expliquen sus estrategias para trazar las espirales.
- Comenten las dificultades a las que se enfrentaron al realizar los trazos.
- Comparen sus espirales pitagóricas con las de sus compañeros y analicen las semejanzas y diferencias.
- Organicen entre todos una exposición con los mejores dibujos.

Comenten lo aprendido y registren sus conclusiones en el cuaderno.

¿Cómo nos fue?

- Discute en grupo si la relación entre los lados de un triángulo dada por el teorema de Pitágoras se cumple para un triángulo no rectángulo.
- Necesitas encontrar la raíz cuadrada de un número para resolver los problemas. ¿Sabes cómo obtener la raíz cuadrada de un número o usar la calculadora para encontrar el resultado?
- ¿En qué situaciones de tu vida cotidiana te podría ser útil lo aprendido en esta secuencia? Explicalo.

© SANTILLANA

Eventos complementarios y mutuamente excluyentes

Contenido

Cálculo de la probabilidad de ocurrencia de dos eventos mutuamente excluyentes y de eventos complementarios (regla de la suma).

La ruleta de números

Reunidos en parejas, lean la información y resuelvan en el cuaderno.

La ruleta surgió en Francia alrededor del siglo XIX. *Ruleta* significa rueda pequeña. La siguiente imagen muestra cómo es una ruleta francesa.



Un alumno de tercer grado investigó sobre la ruleta y decidió hacer algunas pruebas para saber cuál es la probabilidad de ganar en distintas jugadas.

- ¿Cuál es la probabilidad de que la ruleta se detenga en un número par?
- ¿Y de que se detenga en un número impar?
- ¿Cuál es la probabilidad de que se detenga en un número menor o igual que 12?
- ¿Y en un número múltiplo de 3?

Comenten sus respuestas en grupo y escriban sus conclusiones en el cuaderno.

Ahora, lean las características del proyecto que realizarán a lo largo de la secuencia.

Nuestro trabajo

En esta ocasión, por parejas, definirán **dos eventos aleatorios complementarios** P y Q, y **dos eventos mutuamente excluyentes** R y S. Luego, calcularán la probabilidad de que ocurra el evento compuesto P o Q y R o S.

- Pueden utilizar dados, monedas, una moneda y un dado, fichas de colores, papeles numerados u otros objetos.
- Al finalizar las actividades, cada equipo presentará los eventos que definió, explicará por qué son o no mutuamente excluyentes, y qué significa, en cada caso, la probabilidad de que ocurra P o Q y R o S.

Durante la secuencia, en la sección “¿Cómo vamos?”, encontrarán más instrucciones para orientarlos en el desarrollo de su proyecto.

Probabilidad de eventos complementarios

Observa la ruleta de la página anterior y resuelve.

- Determina el espacio muestral E en la ruleta francesa.

$$E = \{ \underline{\hspace{2cm}} \}$$

- Completa los siguientes eventos que se pueden obtener al girar la ruleta. Considera al cero entre los números par.
 - Que se detenga en un número par: $A = \{ \underline{\hspace{2cm}} \}$
 - Que se detenga en un número impar: $B = \{ \underline{\hspace{2cm}} \}$
- ¿Qué se obtiene si se unen los eventos A y B? $\underline{\hspace{2cm}}$
 - ¿Existe algún elemento que pertenezca al evento A y al mismo tiempo al evento B? $\underline{\hspace{2cm}}$
- Los eventos A y B son eventos complementarios. ¿Qué crees que signifique que dos eventos sean complementarios? Escríbelo. $\underline{\hspace{2cm}}$
- Completa la siguiente tabla con las probabilidades expresadas en forma de fracción, de número decimal (usa tres decimales después del punto) y porcentaje.

Probabilidad	Fracción	Número decimal	Porcentaje
P(A)			
P(B)			

- Resuelve las siguientes sumas y restas de probabilidades. Escribe el resultado en forma de fracción, número decimal y porcentaje.

Operación matemática	Fracción	Número decimal	Porcentaje
$P(A) + P(B)$			
$1 - P(A)$			
$1 - P(B)$			

- Analiza la información de las tablas anteriores y vuelve a leer tu definición de eventos complementarios. Realiza los cambios que consideres necesarios.
 - Escribe con tus palabras a qué es igual la suma de las probabilidades de los eventos complementarios. $\underline{\hspace{2cm}}$

Compara tus respuestas con el grupo y justificalas. Encuentra las similitudes y diferencias. Con ayuda del maestro corrige los errores.

Se dice que dos eventos son **complementarios** si su unión es el espacio muestral. Sea **A** un evento aleatorio, su complemento se denota como **A^c**.

Tareas

Resuelve los siguientes ejercicios.

- Determina el evento complementario de los siguientes eventos, que se obtiene al girar la ruleta.

- a) El evento D se obtiene cuando cae un número menor e igual que 12.

$$D = \{ \underline{\hspace{2cm}} \}$$

$$D^c = \{ \underline{\hspace{2cm}} \}$$

- b) El evento M se obtiene cuando la ruleta se detiene en un múltiplo de 3.

$$M = \{ \underline{\hspace{2cm}} \} \quad M^c = \{ \underline{\hspace{2cm}} \}$$

- Calcula las probabilidades de los eventos del ejercicio anterior como fracción, número decimal y porcentaje.

$$P(D) = \underline{\hspace{2cm}} \quad P(D^c) = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$P(M) = \underline{\hspace{2cm}} \quad P(M^c) = \underline{\hspace{2cm}}$$

Revisa tus respuestas en clase. Si tienes dudas, pide ayuda al profesor.

Probabilidad de eventos mutuamente excluyentes

Retoma la actividad inicial, realiza lo que se indica y responde en tu cuaderno.

- Determina los elementos que componen cada una de los siguientes eventos o sucesos. No consideres el cero.

Al girar la ruleta, esta se detiene en:

- un número perteneciente a la primera docena. $M = \{ \underline{\hspace{2cm}} \}$
- un número de la tercera docena. $N = \{ \underline{\hspace{2cm}} \}$
- un número de la primera o tercera docena. $O = \{ \underline{\hspace{2cm}} \}$
- ¿Existe algún número de la ruleta que pertenezca a la primera y tercera docena? Explica tu respuesta.
- ¿Cómo se llaman este tipo de eventos o sucesos? ¿Por qué?
- ¿Qué significa el conectivo "o" en la expresión que define el evento O?
- Escribe un ejemplo de dos eventos de la ruleta francesa que no sean mutuamente excluyentes.

- Completa la tabla con las probabilidades de los eventos de la página anterior. Después responde en tu cuaderno.

Probabilidad	Fracción	Número decimal	Porcentaje
P(M)			
P(N)			
P(O)			

© SANTILLANA

- ¿Qué relación existe entre los resultados de las probabilidades $P(M)$, $P(N)$ y $P(O)$?
- Escribe con tus palabras cómo se calcula la probabilidad de dos eventos que son mutuamente excluyentes.
- ¿Los eventos M y N son complementarios? Fundamenta tu respuesta.

Revisa la actividad en grupo y, en caso de que sus respuestas sean distintas, busquen la correcta.

Dos eventos son **mutuamente excluyentes** cuando no pueden ocurrir al mismo tiempo. Los eventos complementarios son mutuamente excluyentes.

Los dados

Reunidos en parejas, resuelvan la siguiente actividad.

- Completen la tabla con el espacio muestral de lanzar dos dados, uno verde y otro azul.

Dado verde \ Dado azul	1	2	3	4	5	6
1						
2						
3						
4						
5						
6						

- Se tienen tres eventos, evento A: la suma de ambos dados es igual a 6; evento B: el dado azul cae en el 6; y el evento C: el dado verde cae en el 6, rodea con negro los elementos del evento A, con azul los del evento B y con verde los del C.

- Contesten verdadero o falso según corresponda.

- A y B son eventos mutuamente excluyentes. $\underline{\hspace{2cm}}$
- B y C son eventos mutuamente excluyentes. $\underline{\hspace{2cm}}$
- A y C son eventos mutuamente excluyentes. $\underline{\hspace{2cm}}$

- Consideren los eventos de la página anterior y calculen la probabilidad de cada uno:

$$P(A) = \underline{\hspace{2cm}} \quad P(B) = \underline{\hspace{2cm}} \quad P(C) = \underline{\hspace{2cm}}$$

- Calculen la probabilidad de los siguientes eventos compuestos:

$$P(A \text{ o } B) = \underline{\hspace{2cm}} \quad P(B \text{ o } C) = \underline{\hspace{2cm}} \quad P(A \text{ o } C) = \underline{\hspace{2cm}}$$

- Expliquen cómo calcularon $P(B \text{ o } C)$. $\underline{\hspace{2cm}}$

Comenten sus respuestas con las de otra pareja y, juntos, lleguen a conclusiones.

© SANTILLANA

Tareas

Resuelve en tu cuaderno los problemas.

- Determina el espacio muestral con los resultados posibles al lanzar un dado.
 - ¿Cuál es la probabilidad de que no salga un 6?
 - Calcula la probabilidad de obtener un número par.
 - Calcula la probabilidad de que al lanzar el dado no salga un número par.
 - Calcula la probabilidad de que salga un número par o múltiplo de 5.
- Determina el espacio muestral que se obtiene al lanzar dos monedas al aire.
 - Calcula la probabilidad de que se obtenga al menos un sol. ¿Cuál es la probabilidad de que no salga sol?
 - Determina los siguientes eventos y contesta.

A: Las dos monedas caen en sol. $A = \{ \quad \quad \quad \}$

B: Las dos monedas caen en águila. $B = \{ \quad \quad \quad \}$

¿Los eventos A y B son mutuamente excluyentes? ¿Por qué?
 - Calcula la probabilidad de que al lanzar las monedas caigan dos soles o dos águilas.
 - ¿Los eventos A y B son complementarios? Argumenta tu respuesta.

Revisa tus respuestas en clase y resuelve tus dudas con ayuda del profesor.

¿Cómo vamos?

Reúnanse con su equipo y trabajen en su proyecto.

- Decidan el experimento con el que van a trabajar.
- Escriban todos los resultados del espacio muestral.
- Elijan los eventos para cada una de las opciones propuestas.
- ¿Qué eventos P y Q eligieron? ¿Son complementarios?
- ¿Qué eventos R y S eligieron? Expliquen por qué son mutuamente excluyentes.
- Ya que calcularon los resultados del evento compuesto P o Q y R o S, organicen su información en una tabla como la siguiente.

	Evento P	Evento Q	Evento P o Q	Evento R	Evento S	Evento R o S
Resultados						
Probabilidad						

- Elaboren la explicación de por qué los eventos P y Q son complementarios, y R y S son mutuamente excluyentes.
- También lo que significa la probabilidad de que ocurra, P o Q y R o S y preparen su exposición.

© SANTILLANA

¿Qué deporte te gusta?

Reúnanse en equipo y resuelvan.

En la clase de Educación Física, se les preguntó a los alumnos de un grupo de tercer grado qué deportes les gustan: fútbol o volibol. Los resultados obtenidos fueron los siguientes.

- Analicen los datos de la tabla y contesten.

Únicamente le gusta el fútbol	Únicamente le gusta el volibol	Le gustan ambos deportes	No le gustan estos deportes
14	10	5	2

- ¿Cuántos alumnos fueron encuestados? _____
- ¿Qué respondió la mayoría de los alumnos? _____
- Si designamos con A el evento de los alumnos que les gusta el fútbol, y con B el de los alumnos que les gusta el volibol, ¿estos eventos son mutuamente excluyentes? Expliquen su respuesta. _____
- Si se escoge un alumno de tercer grado al azar,
 - ¿cuál es la probabilidad de que le guste el fútbol? _____
 - ¿cuál es la probabilidad de que le guste el volibol? _____
 - ¿cuál es la probabilidad de que le gusten ambos? ¿Y ninguno? _____
 - ¿cuál es la probabilidad de que le guste el fútbol o el volibol? _____

Comparen sus respuestas con otros compañeros y valídenlas con el profesor.

Presentación de nuestro trabajo

Con ayuda de su profesor, organicen para presentar su proyecto.

Describan su espacio muestral, así como los eventos P, Q, R y S que seleccionaron.

- Expliquen al grupo por qué los eventos P y Q son complementarios y por qué los eventos S y R son mutuamente excluyentes.
- Presenten el cálculo de la probabilidad de que ocurran los eventos compuestos, P o Q y R o S, y expliquen por qué las probabilidades se calculan de forma diferente.

Comenten en grupo lo trabajado en la secuencia y lo que aprendieron durante las presentaciones. Escriban sus conclusiones en el cuaderno.

¿Cómo nos fue?

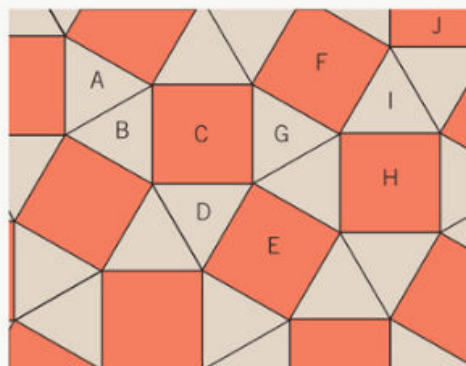
- ¿Cómo podrías explicar a alguien qué significa que dos eventos sean complementarios o mutuamente excluyentes?
- ¿Para qué puede ser de utilidad conocer estos conceptos de probabilidad?
- Al lanzar un dado, ¿qué par de eventos pueden ser complementarios? ¿Cuáles, mutuamente excluyentes?

© SANTILLANA

Evaluación tipo PISA

UNIDAD: Los teselados

Un teselado es una composición de una o varias figuras que cubren una superficie plana, sin dejar huecos y sin superponerse.



Pregunta 1: LOS TESELADOS

Contexto: Escolar

Aprendizaje esperado: Explica el tipo de transformación (reflexión, rotación o traslación) que se aplica a una figura para obtener la figura transformada. Identifica las propiedades que se conservan.

¿Qué figura tiene simetría axial con respecto de la figura A?

- a) Figura I b) Figura G c) Figura D d) Figura B

Pregunta 2: LOS TESELADOS

Contexto: Escolar

Aprendizaje esperado: Explica el tipo de transformación (reflexión, rotación o traslación) que se aplica a una figura para obtener la figura transformada. Identifica las propiedades que se conservan.

Analiza las afirmaciones y escribe "verdadero" o "falso", según corresponda.

- _____ La figura H es una traslación de la figura C.
 _____ La figura E se obtuvo al rotar a la derecha la figura C menos de 90° .
 _____ La figura J es una reflexión de la figura H.
 _____ La figura F se obtuvo al rotar a la derecha la figura H más de 90° .

Pregunta 3: LOS TESELADOS

Contexto: Escolar

Aprendizaje esperado: Explica el tipo de transformación (reflexión, rotación o traslación) que se aplica a una figura para obtener la figura transformada. Identifica las propiedades que se conservan.

¿Qué transformación se debe aplicar a la figura G para que quede en la misma posición de la figura B? Explica el procedimiento que debe seguirse para trazarla.

© SANTILLANA

UNIDAD: El barandal

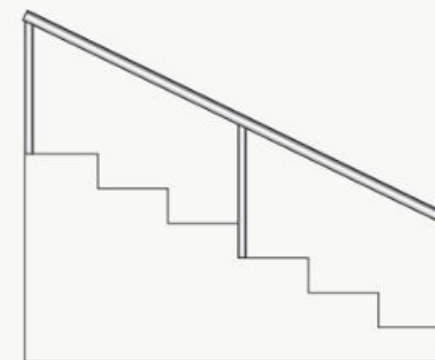
Jorge diseñó una escalera, como la que se muestra en la imagen, cuyos escalones medirán 16 cm de huella por 32 cm de peralte.

Además colocará un barandal de solera, cuyos soportes medirán 75 cm de longitud.

Los soportes y el barandal los hará del mismo material.

La solera se vende por piezas que tienen las siguientes medidas y costos:

- Pieza tipo A. 2 metros..... \$49.00
 Pieza tipo B. 5 metros \$115.00



Pregunta 1: EL BARANDAL

Contexto: Escolar

Aprendizaje esperado: Resuelve problemas que implican el uso del teorema de Pitágoras.

¿Qué altura tendrá la escalera que diseñó Jorge? Escribe tus operaciones y justifica tu resultado.

Respuesta: _____

Pregunta 2: EL BARANDAL

Contexto: Laboral

Aprendizaje esperado: Resuelve problemas que implican el uso del teorema de Pitágoras.

Elige la opción que indica la longitud que tendrá el barandal. Escribe tus operaciones y justifica tu resultado.

- a) 1.07 m
 b) 1.42 m
 c) 2.14 m
 d) 2.49 m

Escribe el procedimiento que seguiste para calcular la longitud del barandal.

Pregunta 3: EL BARANDAL

Contexto: Laboral

Aprendizaje esperado: Resuelve problemas que implican el uso del teorema de Pitágoras.

¿De qué medida debe adquirir las soleras para que el costo sea el menor posible? Justifica tu respuesta.

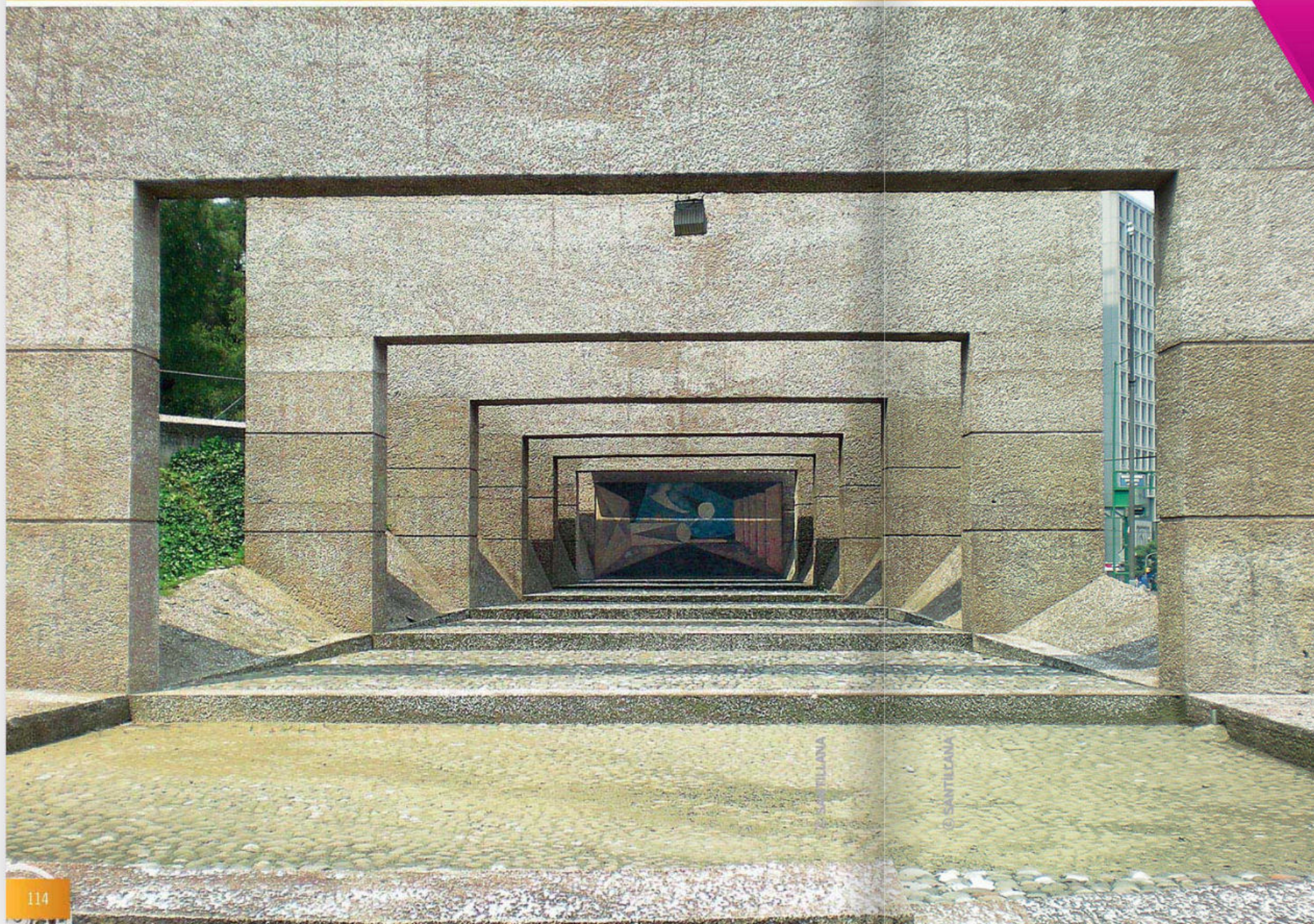
Respuesta: _____

© SANTILLANA

Bloque 3

Como resultado del estudio de este bloque temático se espera que:

- Resuelvas problemas que impliquen el uso de ecuaciones de segundo grado.
- Resuelvas problemas de congruencia y semejanza que impliquen utilizar estas propiedades en triángulos o en cualquier figura.



Plaza Rufino Tamayo

Los arquitectos Teodoro González de León y Ernesto Betancourt diseñaron este espacio en homenaje al pintor oaxaqueño Rufino Tamayo. Entre los elementos que lo conforman destacan siete marcos homotéticos que envuelven una obra del pintor.

Contenido

Resolución de problemas que implican el uso de ecuaciones cuadráticas. Aplicación de la fórmula general para resolver dichas ecuaciones.

La carrera de resistencia**Analiza la información y responde.**

Lorenzo García es un ciclista profesional. Su próximo reto será una competencia de 20 kilómetros. Su entrenador asegura que, según su rendimiento en los últimos años, la cantidad de kilómetros que puede pedalear en óptimas condiciones está definida por la ecuación: $k = -2x^2 + 7x + 69$, donde x representa los meses transcurridos desde que inició la preparación y k , los kilómetros que puede recorrer en las mejores condiciones.

De acuerdo con esta ecuación, su entrenador necesita saber cuántos meses antes de la prueba de 20 kilómetros debe empezar a prepararse.

- Si empieza a entrenar tres meses antes de la competencia, ¿cuál será el valor de k , es decir, cuántos kilómetros recorrerá en óptimas condiciones?
- Escribe una ecuación igualada a cero que involucre los 20 kilómetros de la competencia y los meses de entrenamiento de acuerdo con el rendimiento planteado por el entrenador.
- ¿Qué tipo de ecuación representa el problema?
- ¿Qué métodos conoces para resolver este tipo de ecuaciones?
- ¿Es posible factorizarla? Justifica tu respuesta.
- ¿Cuántos meses antes debe empezar a entrenar? ¿Qué método empleaste para obtener la respuesta?
- ¿Con ese método es posible resolver cualquier ecuación de este tipo? ¿Por qué?

Compara tus respuestas y tu método de solución con los de otros compañeros y válidenlos con el profesor.

A lo largo de las actividades conocerán una forma general de resolver ecuaciones cuadráticas. Antes, lean la información del proyecto que realizarán.

Nuestro trabajo

Reúnanse en equipos de cuatro participantes, deben **diseñar un terreno** en el que se sembrarán pinos y se protegerán de la tala desmedida.

- Deberán plantear y resolver una ecuación que represente cada situación.
- Al final entregarán a su maestro una cartulina donde se representen distintas opciones del diseño y, en grupo, comentarán las propuestas de cada equipo.
- La discusión se centrará en cómo llegó cada equipo a sus diseños finales. En las conclusiones comentarán los aspectos más positivos de cada uno.
- A lo largo de la secuencia, en la sección "¿Cómo vamos?", encontrarán más información para su proyecto.

Área protegida

Antes de trabajar en el diseño del terreno, con un compañero resuelve las siguientes actividades.

En una zona de un bosque se quiere proteger un área con la forma que se muestra en la siguiente ilustración. La superficie donde se sembrarán árboles tiene las medidas que se muestran en la figura. La superficie del pasillo que la rodea ocupa 99 m^2 .



- Si el pasillo tiene el mismo ancho en los cuatro lados, ¿cuánto mide de ancho? Para responder, realicen lo siguiente:
 - Escriban una ecuación que modele el problema: _____
 - ¿Cuál o cuáles son las soluciones de la ecuación? _____
 - ¿Todas las soluciones de la ecuación son soluciones del problema? Argumenten su respuesta. _____
 - ¿Cómo se determina cuál de las soluciones de una ecuación es solución del problema planteado? _____
- ¿Cuál es el ancho del pasillo? _____
- Ahora planteen una ecuación que represente lo siguiente y encuentren las soluciones.
El producto de dos números consecutivos es igual a 182.
 - Ecuación: _____ • Solución: _____
- Resuelvan las ecuaciones cuadráticas de manera individual.
 - $y^2 + 5y - 24 = 0$
 - $x(x - 1) - 5(x - 2) = 2$
 - $3z^2 = 48$
- Comenta con tu compañero el procedimiento que seguiste para resolver cada ecuación.
- Ahora, juntos, resuelvan la siguiente ecuación por medio de uno de los procedimientos que ya conocen:

$$4x^2 + 3x = 22$$
 - ¿Pudieron resolverla? ¿Qué dificultades encontraron?

Comenten con otros compañeros y con el profesor el procedimiento que usaron. Juntos busquen la respuesta o el método más adecuado. Registren sus acuerdos.

La fórmula general

Lee la información y realiza lo que se indica para resolver la actividad.

En la actividad anterior, es posible que al simplificar la ecuación $4x^2 + 3x = 22$ a $x^2 + 0.75x = 5.5$, para encontrar el valor de x , no hayas podido factorizarla o te resultó muy complicado, porque no hay dos números enteros cuya suma sea igual a $3/4$ y cuyo producto sea 5.5 o $-22/4$.

- Para resolver ecuaciones cuadráticas, como la anterior, existe una fórmula general. Para llegar a ella realiza en tu cuaderno lo que se indica:
 - Tomando el ejemplo anterior, ordena la ecuación de la siguiente manera: $ax^2 + bx + c = 0$ con $a \neq 0$.

Llamamos **a** al coeficiente del término cuadrático, **b** al coeficiente del término lineal, y **c** al término constante.

- Multiplica todos los términos de la igualdad por $4a$ y anota la nueva expresión.
- Ahora suma b^2 en ambos lados de la ecuación y resta el factor $4ac$, también en ambos lados, para obtener lo siguiente:

$$4a^2x^2 + 4abx + b^2 = b^2 - 4ac$$

- Reescribe el lado izquierdo de la igualdad como un binomio al cuadrado.
- Elimina el cuadrado sacando la raíz cuadrada en ambos lados.

Recuerda que al sacar raíz cuadrada obtenemos dos resultados, uno positivo y uno negativo, por lo que a la raíz le antepone el signo \pm , dichos resultados se distinguen entre sí por un subíndice de la siguiente manera: x_1, x_2 .

$$2ax + b = \pm\sqrt{b^2 - 4ac}$$

- Resta b en ambos lados de la igualdad y divide todo entre $2a$, obtienes:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

De esta manera es posible encontrar el valor o los valores de la variable x en las ecuaciones cuadráticas.

La fórmula descrita se llama **fórmula general**. Este nombre se debe a que funciona para cualquier tipo de ecuación cuadrática de la forma $ax^2 + bx + c = 0$, independientemente de que tenga dos soluciones, una solución o ninguna. Tampoco importa si sus coeficientes son negativos o positivos, enteros o fraccionarios, o incluso cero (excepto a). Lo anterior no significa que sea el mejor camino cada vez que necesitemos resolver una ecuación cuadrática.

En las secuencias didácticas 1 y 8 de este libro, aprendiste a resolver ecuaciones por otros métodos, algunos sencillos, que tú mismo desarrollaste como se indicó en la secuencia didáctica 1, y otros más complejos como la factorización, que aprendiste en la 8.

En esta secuencia didáctica conocerás en qué casos es más apropiado utilizar uno u otro método de solución, y también las ventajas de la fórmula general para resolver ecuaciones cuadráticas.

Comenta la información con el grupo. Si tienes dudas, resuélvelas con el maestro.

Retoma la ecuación: $4x^2 + 3x = 22$ y realiza lo que se indica.

- Acomódala nuevamente de la forma $ax^2 + bx + c = 0$: _____
- Anota los valores de los coeficientes a , b y c ; no olvides incluir su signo.

$$a = \underline{\hspace{2cm}} \quad b = \underline{\hspace{2cm}} \quad c = \underline{\hspace{2cm}}$$

- Sustituye los valores y escríbelos usando la fórmula general; después realiza las operaciones y encuentra los valores de la incógnita.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\hspace{2cm}}}{\hspace{2cm}}$$

- Enuncia las soluciones: $x_1 = \underline{\hspace{2cm}}$ $x_2 = \underline{\hspace{2cm}}$
- Utiliza la fórmula general para resolver el problema del área protegida de la página 117 y compara el resultado con el que obtuviste antes.
- Retomemos el problema del ciclista de la actividad inicial. ¿Es posible resolverlo por medio de la factorización? ¿Por qué?
 - ¿Te parece que la fórmula general es útil en la solución? ¿Por qué?
 - Utiliza la fórmula general para encontrar el número de meses que debe prepararse para recorrer 3 km en óptimas condiciones.
 - ¿Cuántas soluciones de la ecuación encontraste? ¿Todas responden a la pregunta?
 - ¿Coincide la respuesta con la que obtuviste antes?

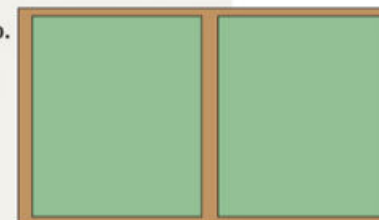
Compara tus respuestas con las de tus compañeros y valídenlas.

¿Cómo vamos?

Reúnanse en equipos para diseñar el terreno del proyecto.

Las características del terreno protegido son las siguientes:

- Mide 63 metros de largo y 41 metros de ancho.
- Cada pino requiere 1 m^2 para crecer.
- Cada visitante debe pagar cierta cantidad de dinero por árbol cortado, y los fondos se destinarán al cuidado del bosque.



El área protegida debe tener caminos entre los pinos para que los visitantes puedan escoger más fácilmente su árbol. Los caminos se encontrarán alrededor y en el centro del terreno, como se indica en la ilustración.

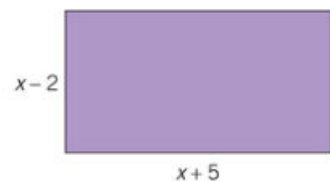
- Cada equipo desarrollará cuatro opciones. Para cada una indicará cuántos árboles se podrán plantar y cuánto medirá el ancho de los caminos y hará un croquis.
- Las cuatro opciones por desarrollar son:
 - Los caminos para los visitantes deberán tener 2 m de ancho.
 - En total deben plantarse 2 000 árboles.
 - En total deben poder plantarse 2 223 árboles.
 - En total deben poder plantarse 2 500 árboles.

Cada equipo debe analizar cada opción y plantear ecuaciones que ayuden a llegar a las respuestas.

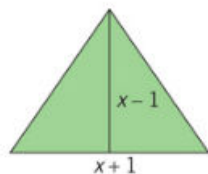
El discriminante

Reúnete con un compañero y resuelvan las actividades.

- El rectángulo que se muestra tiene 15 cm^2 de área.



- Planteen una ecuación que modele el problema y encuentren el valor o los valores de x .
- ¿Cuántas soluciones tiene el problema? _____
- ¿Cuál representa la solución del problema? _____



- El área del triángulo es de 49.5 cm^2 .
- ¿Qué ecuación permite modelar la situación? _____
- Encuentren los valores de x . _____
- ¿Cuánto miden la base y la altura del triángulo? _____
- Resuelvan en su cuaderno las ecuaciones utilizando la fórmula general. Para cada una indiquen cuántas soluciones tiene y cuáles son:

- $x^2 = -15x - 56$ _____
- $x^2 + x + 6 = 0$ _____
- $z - 105 = 2z^2$ _____
- $y^2 - 4y = -4$ _____
- $m^2 + 4 = 0$ _____
- $z^2 + 16 = -8z$ _____
- $m^2 - 4 = 0$ _____
- $w^2 - 2w + 1 = 0$ _____

Comenten sus resultados en el grupo y compárenlos con los de otros compañeros. En caso de que existan diferencias, válídenlos con el maestro.

En la fórmula $\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, el valor que se encuentra dentro de la raíz, que se calcula como $b^2 - 4ac$, se llama **discriminante**. El valor del discriminante puede ser un número positivo, uno negativo o cero. De dicho valor depende el número de soluciones de la ecuación, que pueden ser dos, una o ninguna.

Realiza en tu cuaderno una tabla como la que se muestra para cada una de las ecuaciones anteriores.

- Determina el valor y el signo del discriminante y el número de soluciones. Observa el ejemplo.

Ecuación	Discriminante	Signo del discriminante	Número de soluciones
$x^2 = -15x - 56$	$15^2 - 4(1)(56) = 1$	Positivo	Dos soluciones

- Observa la tabla y clasifica las ecuaciones en tres grupos: las que tengan dos soluciones, las que tengan una y las que no tengan ninguna.
 - ¿Qué puedes concluir?
 - ¿El signo del discriminante te brinda información sobre las soluciones de una ecuación? ¿Cuál?

Comenta lo anterior con el profesor y con tus compañeros y registren una conclusión.

¿Qué método elegimos?

Resuelve las ecuaciones por el método que te parezca más apropiado.

Recuerda que a veces es necesario simplificar o realizar operaciones antes de resolver la ecuación cuadrática. Indica el valor o los valores de la variable.

- $6z^2 = z + 222$
 - Número de soluciones: _____ Valores: _____
- $5x^2 - 9 = 46$
 - Número de soluciones: _____ Valores: _____
- $\frac{y^2}{5} - \frac{y}{2} = \frac{3}{10}$
 - Número de soluciones: _____ Valores: _____
- $z^2 - 18 = 7z$
 - Número de soluciones: _____ Valores: _____
- $3(y + 2) = \frac{(3 - 4)^2 + 8y}{(y - 2)}$
 - Número de soluciones: _____ Valores: _____
- $12m - 7m^2 + 64 = 0$
 - Número de soluciones: _____ Valores: _____

Compara tus resultados con los de otro compañero. Juntos lean la siguiente información y registren en su cuaderno una conclusión.

Ahora ya conoces diferentes métodos para resolver ecuaciones cuadráticas, cuando tengas que resolverlas, hay varios aspectos a considerar para elegir el más adecuado. Por ejemplo, la factorización simplifica las expresiones y así es más fácil trabajar con ellas.

La fórmula general tiene la ventaja de que con ella se resuelve cualquier ecuación cuadrática. Las ecuaciones muy sencillas que no requieren ni factorización ni fórmula pueden resolverse directamente y así será más eficiente. Con la práctica, tú mismo reconocerás en qué casos conviene utilizar uno u otro método.

¿Cómo vamos?

Reúnete nuevamente con tu equipo para trabajar en el área del bosque.

- Para cada opción, anoten la ecuación que la represente.
- ¿Qué tipo de ecuaciones son? ¿Cómo pueden resolverlas?
- Decidan el método más eficaz para resolver cada ecuación y resuélvanlas.
- Determinen las soluciones de cada ecuación que sean respuestas del problema.
- ¿Qué tipo de ecuaciones les permitieron obtener las medidas requeridas?
- ¿Cuántas soluciones obtuvieron en cada caso?
- ¿Qué dificultades han enfrentado al elaborar sus diseños?
- Reúnan el material y dibujen el diseño de cada terreno; indiquen claramente, junto al dibujo, los datos solicitados.
- Organícense en equipo para exponer los resultados y explicar los procedimientos.

Tareas

Resuelve las siguientes actividades en tu cuaderno.

1. De estas tres ecuaciones, indica cuáles tienen una solución, cuáles tienen dos soluciones y cuáles no tienen solución. No es necesario que encuentres los valores de la incógnita.

a) $6x^2 - 5x + 1 = 0$

b) $4x^2 - 17x + 15 = 0$

c) $x^2 + x + 1 = 0$

2. Resuelve las ecuaciones, encuentra los valores de la incógnita.

a) $w^2 - 8w = 0$

b) $2x^2 = 3x$

c) $x^2 + 3x + 2 = 0$

d) $m^2 + 2m - 24 = 0$

e) $4y^2 - 12y + 9 = 0$

f) $6x^2 - 24x = 0$

3. Resuelve los problemas:

- a) Si la altura en a metros que alcanza un proyectil lanzado desde el piso a los t segundos de su lanzamiento es $a = -16t^2 + 120t$, ¿en cuánto tiempo alcanzará los 180 metros?

- b) Se construye una caja sin tapa en un cuadrado de cartulina, como la que se muestra. Para ello, se recorta un cuadrado de 4 cm en cada extremo, de manera que se doblen los bordes para formar las paredes de la caja como lo indica el diagrama.

- Si el volumen de la caja es de 576 cm^3 , ¿cuánto medía originalmente cada lado de la cartulina?

- c) Encuentra tres números enteros consecutivos tales que el cociente del tercero entre el primero sea igual a $\frac{2}{3}$ del segundo.

En clase, compara tus respuestas con las de otros compañeros y valídenlas con el grupo con la supervisión del profesor.

Resolución de problemas

Resuelvan en parejas los siguientes problemas.

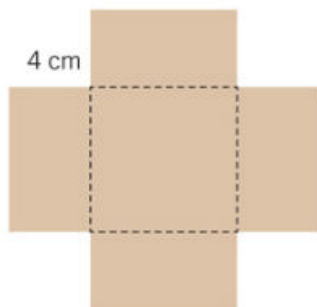
- Ana Luz compró algunas libretas y pagó \$240. Karla compró 3 libretas más que Ana Luz y pagó lo mismo, porque a ella cada libreta le costó \$4 menos.

- ¿Qué ecuación modela la situación? _____
- ¿Cuántas libretas compró Ana Luz? _____

- Con el propósito de hacer negocio, compré unos paraguas para decorar y pintar y me gasté \$2000. Mientras los pintaba se me rompieron 2, y los que restaban los vendí \$60 más caros del precio al que los compré. Si gané \$80,

- ¿cuántos paraguas compré? _____
- ¿cuánto me costó cada uno? _____
- ¿creen que valió la pena el negocio? ¿Por qué? _____

© SANTILLANA



- Imagina un álbum de 200 estampas deportivas. El número de estampas que hay en cada página es 8 veces mayor que el número de páginas.
 - ¿Cuántas páginas tiene el álbum? _____
 - ¿Cuántas estampas tiene cada página? _____
- La suma de dos números es 11 y la suma de sus cuadrados es 61.
 - Encuentra los dos números. _____
- Si a un número le sumo 5, resulta lo mismo que si divido 84 entre ese número, ¿de qué número se trata? _____
- Reúnanse en grupo, comparen los resultados y procedimientos de cada problema y respondan:
 - ¿Todos tuvieron los mismos resultados?
 - ¿Hay más de una respuesta correcta a los problemas?
 - ¿Todos usaron los mismos procedimientos?
 - En cada uno tuvieron que resolver ecuaciones cuadráticas. ¿Todas las soluciones a la ecuación fueron soluciones al problema?

Reúnete de nuevo con tu pareja y comenten si el método que utilizaron para resolver cada problema fue o no el correcto. Expliquen por qué.

Espacio
tecnológico

Visita el sitio de Internet:

www.disfrutalasmaticas.com/algebra/ecuaciones-cuadraticas.html (consulta: 23 de diciembre de 2016, 11:41 horas). Ahí podrás complementar la información dada acerca de ecuaciones cuadráticas, la fórmula general y el discriminante.

Presentación de nuestro trabajo

Cada equipo presente al grupo su proyecto antes de entregarlo al maestro.

- Muestren los croquis de cada opción de terreno y, apoyándose en el pizarrón, si es necesario, muestren los procedimientos de solución de las ecuaciones.
- ¿Hubo distintos resultados entre un equipo y otro?
- ¿Las ecuaciones y soluciones fueron las mismas?
- ¿En algunos equipos se usaron distintos procedimientos para llegar a la solución?
- ¿Algunas soluciones de las ecuaciones no fueron solución al problema del terreno y los caminos? ¿Por qué?

¿Cómo nos fue?

- ¿Cuántos métodos conoces para resolver ecuaciones cuadráticas?
- ¿Cómo decides qué método utilizar para resolver una ecuación cuadrática?
- ¿Cuántas soluciones puede tener una ecuación cuadrática?
- Cuando una ecuación cuadrática se usa para resolver una situación problemática, ¿todas las soluciones a la ecuación son soluciones al problema? ¿De qué depende?
- ¿Qué fortalezas tiene la fórmula general para ecuaciones cuadráticas comparada con otros métodos?
- ¿Por qué es útil conocer el discriminante al resolver ecuaciones cuadráticas?

© SANTILLANA

Cálculo de distancias y alturas inaccesibles

Contenido

Aplicación de los criterios de congruencia y semejanza de triángulos en la resolución de problemas.

Midamos alturas inalcanzables

Analiza la información y responde.



Plaza de la Constitución, Ciudad de México.

El ser humano siempre ha tratado de determinar la medida exacta de alturas inalcanzables, como las de edificios, árboles, pirámides o montañas. Para eso ha usado diferentes procedimientos, algunos muy ingeniosos. En México existen astas monumentales, de más de cincuenta metros, como la que se muestra en la fotografía. Incluso, la más alta de América Latina se encuentra en Iguala, Guerrero.

- ¿Qué procedimientos puedes utilizar para calcular la altura de un asta bandera monumental, como la que se muestra en la imagen?
- ¿Qué información necesitas conocer para calcular, indirectamente, la altura del asta bandera?
- ¿Consideras útil la información sobre propiedades de los triángulos para calcular distancias o alturas que no puedes medir directamente, como el asta bandera? Explicalo.

Comenta tus respuestas con tus compañeros y tu profesor. Al finalizar, identifica qué conocimientos son necesarios para medir alturas inalcanzables.

A lo largo de las actividades regresarás a trabajar con este problema. Antes reúnete con un compañero y lean la información del proyecto que realizarán en esta secuencia.

Nuestro trabajo

En parejas van a presentar un **informe** con una estrategia para resolver problemas que involucran congruencia y semejanza de triángulos. Elijan problemas para ilustrar cada estrategia.

- Deberán presentar su informe al profesor y a todo el grupo, y justificar sus estrategias geoméricamente.

En esta secuencia didáctica aprenderán a utilizar diferentes procedimientos para resolver problemas.

© SANTILLANA

Alturas y sombras

Antes de resolver el problema inicial, realizarás algunas actividades en las que aprenderás a medir alturas de manera indirecta. Para ello, necesitarás escuadra, regla o metro, lápiz y gis.

Formen equipos de tres compañeros de diferentes estaturas y hagan lo que se indica.

- Salgan al patio cuando el Sol no esté en el cenit para que se proyecten sombras. Dibujen dos puntos en el piso (A y B) a una distancia de 30 cm entre ambos. Un integrante del equipo se parará en cada punto, de manera que ambos puedan ver su sombra. El otro compañero deberá marcar en el suelo el punto donde termina la sombra de cada uno (A' y B'). Unan los puntos A con A' y B con B' .
- Tomen las medidas necesarias para completar la tabla.

Nombre	Estatura	Longitud de su sombra
Cociente		

- Calculen el cociente entre las dos estaturas y entre las dos sombras y registrenlos en la tabla. ¿Qué observan? _____
- ¿Qué relación hay entre las dos sombras? _____
- ¿Qué relación hay entre la altura de cada compañero y su sombra? Explíqueno.

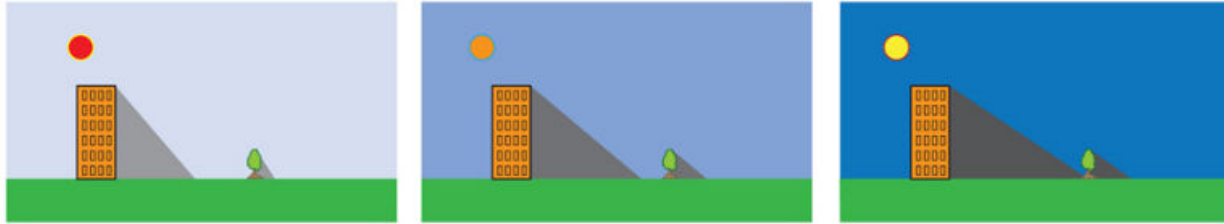
- Dibujen en su cuaderno la situación anterior utilizando triángulos. Uno de los lados será la estatura de un compañero (AC), el segundo lado será la sombra que se marca en el piso (AB) y el tercero, el rayo del Sol que se proyecta sobre su cabeza (BC). Repitan el procedimiento para el segundo caso.
- ¿Qué tipo de triángulos son? ¿Qué relación hay entre estos triángulos? Explíqueno.

Analicen la afirmación relacionada con la situación anterior: los triángulos ABC y $A'B'C'$ son semejantes. ¿Qué datos deben verificar entre los triángulos para asegurar si esto es falso o verdadero? Coméntenlo con el profesor.

Para calcular la altura de un objeto, podemos utilizar la sombra que proyecta y considerar la semejanza entre los triángulos que se forman. Por ejemplo, el Sol hace que objetos paralelos proyecten sombras paralelas.

© SANTILLANA

Si los objetos se encuentran muy próximos, a la misma hora sus sombras forman triángulos rectángulos semejantes porque los rayos que se proyectan en el mismo instante sobre objetos muy cercanos son **paralelos**, es decir, los rayos inciden sobre los objetos bajo un mismo ángulo. Esto lo pueden apreciar en las siguientes imágenes. Observen cómo, según la posición del Sol, las sombras varían en extensión.



Analicen las imágenes, y expliquen cómo, por medio de la semejanza de triángulos, se puede calcular la altura de los objetos.

Tareas

Realiza las siguientes actividades y registra en el cuaderno tus respuestas.

- De los siguientes datos, elige los necesarios y suficientes para calcular la altura del asta bandera de la situación inicial de esta secuencia y resuélvelo.
 - La sombra del asta bandera mide 22.62 m.
 - La altura de una persona es de 1.62 m.
 - La sombra de esa persona es de 32 cm.
 - El ángulo que se forma entre el asta bandera y su sombra es de 90° .
 - El ángulo que forman la persona y su sombra es de 90° .
 - La distancia entre la persona y el asta bandera es de 1 m.
 - El momento del día: las 14:00 horas.

En la siguiente clase, explica a tu profesor y tus compañeros cómo elegiste los datos y el procedimiento para resolver el problema.

¿Cómo vamos?

Reúnete con tu compañero. Antes de elegir la estrategia que presentarán en su informe, hagan lo siguiente.

- Elijan un objeto que no puedan medir directamente, utilicen la información que resulte de medir su sombra en el suelo. Para ello, elijan la hora del día más adecuada para medir sombras. Pueden colocar verticalmente un palo de 1 m de altura. Anoten a qué hora la sombra es más pequeña que la altura del objeto y a qué hora es más grande. ¿Por qué? Cuanto más cerca del horizonte esté el Sol, más largas serán las sombras. La posición del Sol no depende solo de la hora del día, sino también de la estación del año

© SANTILLANA

Instrumentos para calcular distancias o alturas inaccesibles sin usar sombras

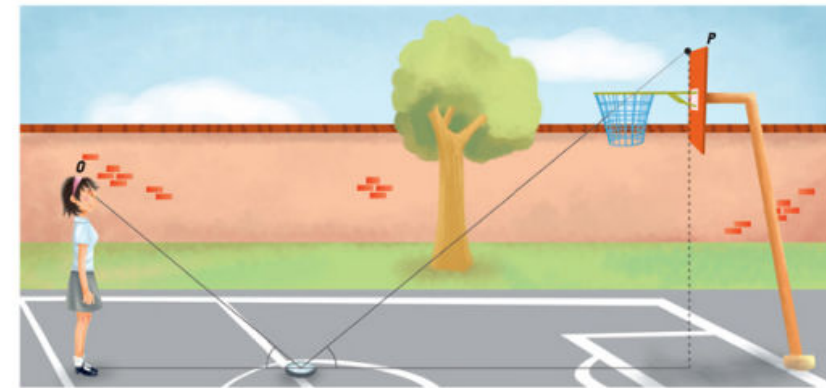
Ahora calculemos la altura del poste de la cancha, de un poste de luz o de un árbol de tu escuela. En la sección anterior vimos cómo calcular ese tipo de alturas usando las sombras y la semejanza de triángulos. En esta sección aprenderemos otras estrategias para calcular alturas indirectamente: si usas otra vez la semejanza de triángulos, sabrás cómo aplicar tres métodos diferentes. Este tipo de aplicaciones es muy útil, por ejemplo, para quienes practican deportes de montaña.

Trabajen en equipo. Registren sus resultados en el cuaderno.

Lean en qué consiste cada método y consigan el material necesario para llevar a cabo las actividades; después, formen equipos de tres integrantes y salgan al patio de su escuela siguiendo las instrucciones de su profesor. Una vez afuera, elijan el objeto que van a medir. Recuerden que el propósito es determinar alturas de objetos que no se pueden medir directamente.

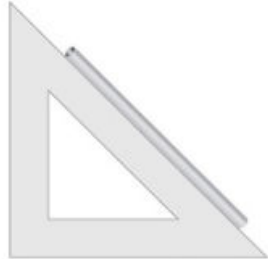
Método de Euclides (o de reflexión)

Necesitarán un espejo, cinta métrica, papel y lápiz.



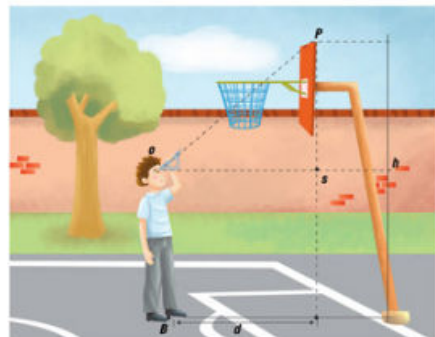
- Coloquen el espejo a una distancia considerable del objeto que desean medir. El espejo debe estar completamente horizontal para que la estimación sea mejor. El observador tiene que colocarse donde pueda ver, en el espejo, el punto más alto del objeto elegido. Observen la imagen para saber dónde ubicarse.
- Recopilen los datos que se piden y contesten.
 - Midan y anoten las distancias que hay entre el espejo y el objeto seleccionado, así como entre el espejo y el observador.
 - Midan la altura del observador desde los pies hasta los ojos. ¿Por qué piensan que debe ser así?
 - Calculen y escriban la altura del objeto seleccionado.
 - Nombren los triángulos que se forman. ¿Qué relación hay entre estos?
 - ¿Cómo se puede utilizar lo aprendido sobre criterios de semejanza para justificar la validez de este método? De los criterios que han visto, ¿cuál es el que se usa?
 - Investiguen la explicación física de por qué es necesario usar el espejo en este método.

© SANTILLANA



Método de la escuadra

Continuarán en el patio de su escuela para aplicar el segundo método. Deben utilizar el mismo objeto de la actividad anterior para comparar los resultados de los cálculos. Necesitarán una escuadra, un popote, cinta adhesiva, cinta métrica, papel y lápiz. Registren sus mediciones y sus respuestas en el cuaderno.



- Coloquen el popote sobre la hipotenusa del triángulo rectángulo que tiene la escuadra, como se muestra en las imágenes de la izquierda.
- El observador debe ubicarse donde pueda ver por el popote, es decir, focalizar el punto más alto del objeto que se va a medir (P). Esto también puede hacerse sin el popote. Es importante que el observador mantenga uno de los catetos horizontalmente y el otro, paralelo al objeto que se va a medir. Si no pueden mantener estable la escuadra, utilicen como base un bote de basura o una mesa.

Una vez ubicados el observador y la escuadra como se muestra en las imágenes, hagan lo siguiente y contesten.



- Observen que se forma un triángulo (llamémoslo OPS) semejante al de la escuadra. ¿Por qué es así?
- Ahora, otro miembro del equipo medirá la distancia del observador al objeto (OS) y la altura desde el suelo hasta el ojo del observador (o el lugar donde está ubicada la esquina de la escuadra), es decir, BO . ¿Cuál es la altura del objeto seleccionado? (Pista: primero calculen la distancia de PS).
- ¿Qué criterio de semejanza utilizaron?

- ¿Coincide su resultado con el obtenido con el método de Euclides?
- Cambien de observador (un integrante del equipo con diferente estatura) y repitan el proceso. ¿Los resultados cambiaron? Expliquen su respuesta.

Método del leñador

En el mismo lugar y con el objeto que han medido, apliquen el tercer método. Necesitarán una vara, cinta métrica y papel.

Los leñadores usan este procedimiento para estimar hasta dónde llegará un árbol al caer. También sirve para calcular alturas indirectamente, por ejemplo, para estimar la cantidad de cuerda que se necesita al ascender en un barranco o una montaña.

- Observen las imágenes, sigan los pasos y contesten en el cuaderno.



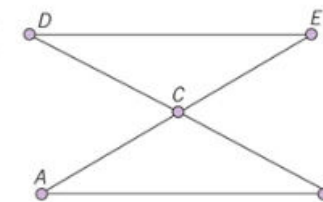
© SANTILLANA

- El observador debe colocarse a una distancia conveniente, de manera que, con el brazo extendido horizontalmente y la vara en posición vertical, tape por completo el objeto que se va a medir: desde el suelo hasta su punto más alto. Es decir, en su campo visual deben coincidir la vara y el objeto.
- Sin moverse de lugar, y sin cambiar la parte inferior de la vara que coincide con el punto del suelo donde está el objeto, el observador debe girar la mano 90° para que la vara quede en posición horizontal.
- Otro miembro del equipo debe servir de punto de referencia. Para ello, se ubicará en el nivel de la base del objeto por medir, en ángulo recto respecto del observador, y caminará hasta que, en la visión del observador, su posición coincida con el extremo superior de la vara al momento en que esta quede en posición horizontal.
- Midan la distancia entre el nuevo punto de referencia y la base del objeto. Esta distancia corresponderá a la altura que se busca.
- Comenten con el profesor los argumentos geométricos que respaldan este método. ¿Se usa la semejanza de triángulos?
- ¿Coinciden los resultados de los tres métodos para calcular la altura del objeto seleccionado?
- Comenten con el profesor la aplicación de la semejanza de triángulos para calcular alturas indirectamente. ¿Estos métodos funcionan para alturas que pueden calcular directamente? ¿Por qué?

A resolver problemas

En equipo, resuelvan los problemas. Argumenten geoméricamente los procedimientos utilizados. Respondan en el cuaderno.

1. En la secundaria se diseñó un huerto escolar triangular. Para ello, se usaron tres trozos de alambre de 4 metros de longitud. La directora autorizó construir otro huerto también triangular en otro espacio y les entregó 12 metros de alambre.
 - ¿Los dos triángulos que definen el espacio de los huertos son congruentes? Argumenten su conclusión.
 - ¿Los dos triángulos que definen el espacio de los huertos pueden ser semejantes? ¿Cuáles serían sus medidas?
2. En la figura, AE interseca a BD en C , tal que $AC = DC$ y $BC = EC$.
 - ¿Qué relación hay $\angle EAB = \angle CDE$? Argumentalo.



Presentación de nuestro trabajo

Reúnete con tu compañero para presentar al grupo su informe.

- Presenten sus problemas y estrategias.
- Analicen las estrategias presentadas por los equipos. Cuáles son las que más se repiten y cuáles las que menos y por qué. Recuerden describir sus procedimientos y la justificación geométrica de los resultados.

¿Cómo nos fue?

- ¿Cómo decidiste qué estrategia utilizar en la resolución de un problema de congruencia y semejanza de triángulos?

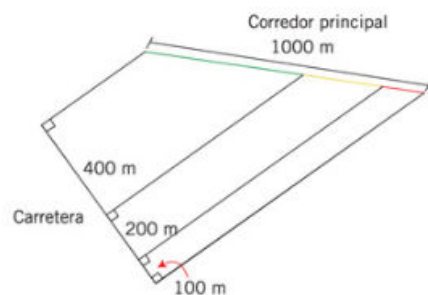
El teorema de Tales y sus aplicaciones

Contenido

Resolución de problemas geométricos mediante el teorema de Tales.

El albergue canino

Lee la información y plantea dos preguntas que se resuelvan con esta.



En un albergue para perros de la calle, hay una sección para atender a los animales heridos. Esta sección está dividida en tres partes, como se muestra en la figura. Junto al corredor principal se quiere colocar malla de diferentes colores para clasificar a los animales según su estado de salud: rojo para los que están graves y no pueden moverse, amarillo para los que se mueven con dificultad y verde para los que están en observación para darlos en adopción.

Los límites laterales del terreno son perpendiculares a la barda que separa el albergue de la carretera. La longitud del frente total de los tres lotes en el corredor principal es de 1 000 metros.

Formen equipos y resuelvan las actividades.

- Analicen las siguientes preguntas y elijan la que represente un mayor reto para resolver y respóndanla: ¿Qué forma tiene la figura del albergue canino dedicada a la atención de animales heridos? ¿Qué relaciones geométricas permiten calcular la cantidad de malla necesaria?
- Describan el proceso matemático que seguirían para calcular la cantidad de malla de cada color que deberían comprar.

Justifiquen geoméricamente sus respuestas y, con la guía de su profesor, evalúen las estrategias utilizadas por sus compañeros.

A lo largo de las actividades regresarán a trabajar con este problema. Antes lean la información del proyecto que realizarán en esta secuencia.

Nuestro trabajo

En equipos, con la guía de su profesor, elaborarán un **juego de mesa y su tablero** en el que haya una salida y una meta. Deberán usar cartón o cartoncillo del tamaño de una hoja doble carta y colores.

Diseñen las reglas del juego y ubiquen casillas de retos matemáticos. En estas casillas podrán utilizar colores para diferenciar los niveles de dificultad de los problemas. Al plantear los problemas, consideren que su solución requiera aplicar lo aprendido sobre el teorema de Tales y los conceptos relacionados con este vistos en secundaria. En el apartado "¿Cómo vamos?" encontrarán sugerencias para realizar el proyecto.

Al final de la secuencia intercambiarán los juegos con otros equipos y jugarán una partida.

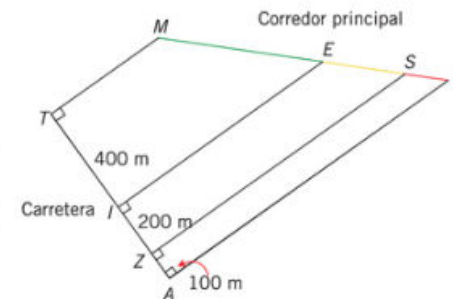
© SANTILLANA

La malla para el albergue

Realiza las actividades.

En la siguiente actividad retomarás el problema inicial. Necesitarás tu cuaderno de cuadrícula, regla o escuadra, transportador y lápiz.

Realiza las mediciones que consideres necesarias para contestar las preguntas. Identifica por sus letras los puntos de los segmentos.



- ¿Qué relación tienen los segmentos \overline{TM} , \overline{TE} , \overline{ZS} y \overline{AO} ? Argumenta geoméricamente tu respuesta.
- ¿Cómo es \overline{TA} respecto de la posición que tiene con los cuatro segmentos anteriores?
- Completa la tabla; para ello, toma las medidas que se necesiten y realiza los cálculos correspondientes.

Segmento	Longitud a escala	Longitud real	Razón	Cociente
\overline{TA}			$\frac{\overline{TA}}{\overline{TI}}$	
\overline{TI}			$\frac{\overline{MO}}{\overline{ME}}$	
\overline{MO}			$\frac{\overline{TZ}}{\overline{TA}}$	
\overline{ME}			$\frac{\overline{ES}}{\overline{MO}}$	
\overline{ES}			$\frac{\overline{ZA}}{\overline{TA}}$	
\overline{SO}			$\frac{\overline{SO}}{\overline{MO}}$	

- Considerando los datos anteriores, ¿qué sucede con cada par de razones que están marcadas con el mismo color? ¿Qué significado geométrico tiene esta relación? _____

- ¿Qué relación se puede establecer entre estos segmentos? _____

- ¿Cuántos metros de malla de cada color se necesitan para el albergue canino? ¿Cómo encontraste la respuesta? _____

- Confronta este procedimiento con el aplicado en el inicio de la secuencia. ¿Obtendrían el mismo resultado? ¿Cuál es más eficiente? _____

© SANTILLANA

Presenta al grupo tus respuestas. Valídalas con argumentos geométricos.

Razones entre segmentos

Haz los trazos y responde.

La malla para el albergue canino es un caso particular, pero ¿ocurrirá siempre esto entre las rectas? ¿En qué condiciones sucede? Para responder, sigue las instrucciones.

L1

- Traza en el cuaderno la recta $L1$ y tres rectas paralelas a esta; nómbralas $L2$, $L3$ y $L4$. Traza dos rectas transversales (o secantes) a estas y nómbralas $T1$ y $T2$.
- Nombra los puntos de intersección entre las rectas y sus transversales (o secantes) de la siguiente manera:
 - A a la intersección entre $L1$ y $T1$, B a la intersección entre $L2$ y $T1$, C a la intersección entre $L3$ y $T1$, D a la intersección entre $L4$ y $T1$, P a la intersección entre $L1$ y $T2$, Q a la intersección entre $L2$ y $T2$, R a la intersección entre $L3$ y $T2$, y finalmente S a la intersección entre $L4$ y $T2$.

Después de realizar las mediciones y cálculos correspondientes, completa la tabla. Puedes usar calculadora. Escribe los resultados en la columna "Mis resultados".

Segmento	Mis resultados	Resultados 1	Resultados 2	Razón	Mis resultados	Resultados 1	Resultados 2
\overline{AB}				$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}$			
\overline{BC}				$\frac{\overline{PQ}}{\overline{QR}}$			
\overline{CD}				$\frac{\overline{BC}}{\overline{CD}}$			
\overline{PQ}				$\frac{\overline{QR}}{\overline{RS}}$			
\overline{QR}							
\overline{RS}							

- Elige otros dos segmentos cualesquiera y mídelos. En la tabla, anótalos en los renglones de abajo. Calcula su razón (segmentos determinados por $L1$, $L2$, $L3$ y $L4$ con $T1$). Haz lo mismo con sus correspondientes (segmentos determinados por $L1$, $L2$, $L3$ y $L4$ con $T2$). Anota los resultados en la tabla.

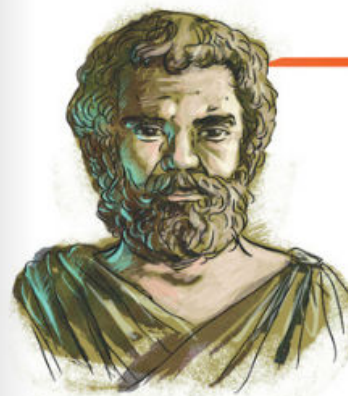
© SANTILLANA

- Sigue las instrucciones del profesor y forma un equipo. Intercambien sus mediciones y registren en la tabla los resultados de cada compañero. ¿Qué invariantes encuentran? Compartan sus conjeturas y elaboren una nueva que incluya las ideas consensuadas del equipo.

En equipo lean la información y compárenla con su conjetura final. Discutan en qué se parecen y en qué difieren. Con ayuda de su profesor, replanteen su conjetura utilizando los términos matemáticos adecuados.

Teorema de Tales. Si dos o más rectas paralelas son cortadas por dos rectas transversales, la razón de dos segmentos cualesquiera de una de ellas (una transversal) es igual a la razón de sus segmentos correspondientes de la otra (transversal). Es decir, los segmentos determinados por estas transversales son proporcionales. Y viceversa, si los segmentos determinados por dos transversales a más de dos rectas son proporcionales, entonces las rectas son paralelas.

Historias de vida



Tales nació en la ciudad de Mileto (en la actual Turquía) aproximadamente en 624 a. de C. y murió en 548 a. de C. Fue considerado uno de los siete sabios de Grecia. Fue el primer pensador en demostrar sus afirmaciones y, por ello, muchos historiadores lo llaman el padre de las matemáticas. Entre sus aportaciones están:

- Todo diámetro biseca a la circunferencia.
- Todo ángulo inscrito en una semicircunferencia es recto.
- Los ángulos opuestos por el vértice son iguales.
- Los ángulos en la base de un triángulo isósceles son iguales.
- Dos triángulos que tienen dos ángulos y un lado respectivamente iguales son iguales.

Un grupo de música argentino llamado Les Luthiers tiene una canción que se titula *El teorema de Tales*, puedes escucharla en www.youtube.com/watch?v=OXrYNPJQoTA. (consulta: 23 de diciembre de 2016, 11:42 horas).

*Si tres o más paralelas,
si tres o más parale-le-le-las
son cortadas, son cortadas
por dos transversales, dos transversales.*

Comenten con todo el grupo y el profesor el significado de este teorema. Identifiquen las condiciones que se deben dar y la conclusión que se puede obtener.

¿Cómo vamos?

Reúnanse en sus equipos para hacer su juego de mesa.

- Decidan cuántas casillas incluirán en su tablero; el número de retos que colocarán (preguntas de contenido, de ejercicios y de aplicaciones de lo estudiado hasta ahora, y que se relacionen con el teorema de Tales) y, por último, si habrá premios y penalizaciones dentro de las casillas y cuántos.
- Las instrucciones del juego deben incluir cuál será el número de jugadores, cómo se avanzará dentro del tablero, quién ganará y cómo se darán los turnos entre los que participen.

© SANTILLANA

Espacio tecnológico

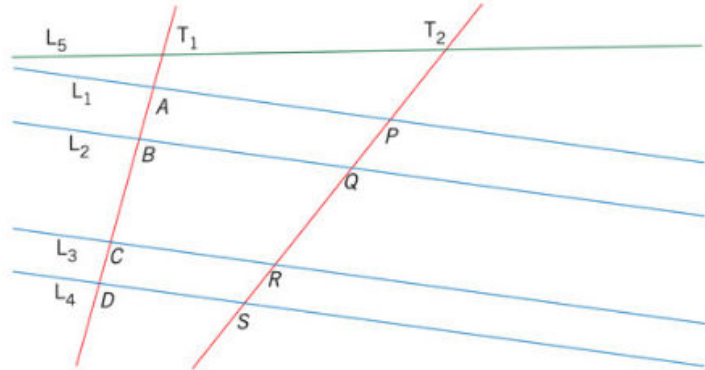
Para la siguiente actividad, si es la primera vez que utilizas un programa de geometría dinámica, puedes asesorarte con el profesor de Matemáticas. Busca en el aula de medios (o sala de cómputo) algún programa de geometría dinámica y, si no hay, ingresa a:

www.geogebra.org/cms/es
www.cabri.com/es

(consulta: 24 de enero de 2017, 13:47 horas)

Después de descargar el programa, realiza lo siguiente y contesta las preguntas en tu cuaderno:

1. Traza una recta cualquiera y llámala L_1 .
2. Con la herramienta de recta paralela, traza otras tres rectas L_2 , L_3 y L_4 paralelas a L_1 .
3. Ahora traza dos rectas transversales (o secantes) a las rectas anteriores y llámalas T_1 y T_2 .
4. Nombra los puntos de intersección entre las rectas y sus transversales (o secantes).
5. Con la herramienta de medición del programa de geometría dinámica, mide la longitud de los segmentos \overline{AB} , \overline{BC} , \overline{CD} , \overline{PQ} , \overline{QR} , \overline{RS} .
6. Resuelve las siguientes razones con la calculadora:
 - a) $\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}$ y $\frac{\overline{PQ}}{\overline{QR}}$
 - b) $\frac{\overline{BC}}{\overline{CD}}$ y $\frac{\overline{QR}}{\overline{RS}}$
- c) Toma otros dos segmentos cualesquiera y calcula su razón (formados por L_1 , L_2 , L_3 y L_4 con T_1). Haz lo mismo con sus correspondientes (formados por L_1 , L_2 , L_3 y L_4 con T_2).
- d) ¿Qué puedes concluir respecto de las razones entre los segmentos y sus correspondientes?
7. Ahora, usando el mouse, mueve la recta T_1 . ¿Se mantiene la relación establecida entre las razones? Ahora mueve la recta T_2 . ¿Qué sucede con las razones? ¿Qué cambia y qué permanece invariante?
8. Escribe una conjetura sobre tu observación.
9. Ahora traza una recta L_5 (que no sea paralela) y calcula las razones entre dos segmentos formados con T_1 y dos segmentos formados con T_2 . ¿Son iguales o diferentes?
10. Mueve la recta L_5 de manera que se aproxime a una relación de paralelismo con cualquiera de las rectas L_1 , L_2 , L_3 o L_4 . ¿Qué pasa con las razones anteriores?



Para explorar más actividades sobre aplicaciones del teorema de Tales, te sugerimos revisar la siguiente página en Internet:

descartes.cnice.mec.es/Descartes1/4a_eso/Semejanza_4/thales_y_triangulos.htm (consulta: 24 de enero de 2017, 13:48 horas)

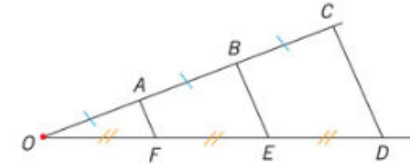
Aquí podrás investigar, la aplicación del teorema de Tales en la semejanza de triángulos. También podrás acceder a otras aplicaciones de este teorema.

© SANTILLANA

Tareas

Haz las actividades. En la siguiente clase, presenta los resultados a tu profesor y todo el grupo.

1. ¿Qué significa la palabra *teorema*? Búscala en un diccionario y en un libro de geometría. Con tus palabras, escribe su significado en tu cuaderno.
2. Observa las figuras y completa los datos que se te piden.



a) $\overline{AB} = \underline{\hspace{2cm}} \overline{AI}$

b) $\frac{\overline{OA}}{\overline{OC}} = \underline{\hspace{2cm}}$

$\overline{AI} = \underline{\hspace{2cm}} \overline{AB}$

$\frac{\overline{OB}}{\overline{OC}} = \underline{\hspace{2cm}}$

$\frac{\overline{AI}}{\overline{AB}} = \underline{\hspace{2cm}}$

$\overline{AB} = \underline{\hspace{2cm}} \overline{AC}$

$\frac{\overline{AB}}{\overline{AI}} = \underline{\hspace{2cm}}$

$\overline{OD} = \underline{\hspace{2cm}} \overline{OF}$

- c) ¿Qué relación tienen los segmentos \overline{AF} , \overline{BE} y \overline{CD} ? Argumenta tu respuesta.

Múltiplos y submúltiplos de un segmento

Haz las actividades y responde en tu cuaderno.

En las siguientes actividades dividirás segmentos en partes iguales. Necesitarás dos hojas en blanco, una rayada, media hoja de papel calca, regla, compás y lápiz.

- Traza un segmento \overline{AB} . Ahora construye un rayo \overline{AB} y sobre este construye el segmento \overline{AC} que sea el doble de \overline{AB} , sin usar medición con regla. Reúnete con un compañero y comenten el procedimiento que siguieron.
- Dibuja un segmento \overline{AB} en tu hoja. Divide tu segmento en dos partes iguales. ¿Cómo lo hiciste? ¿Cómo garantizas que, en efecto, son iguales?
- Al punto medio del segmento \overline{AB} nómbralo O y completa la siguiente información.

• $\overline{AB} = \underline{\hspace{2cm}} \overline{AO}$ • $\overline{AO} = \underline{\hspace{2cm}} \overline{AB}$

• $\overline{OB} = \underline{\hspace{2cm}} \overline{AB}$ • $\overline{AO} = \underline{\hspace{2cm}} \overline{OB}$

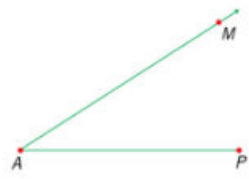
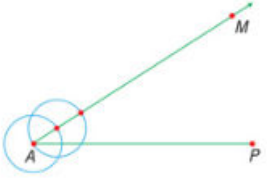
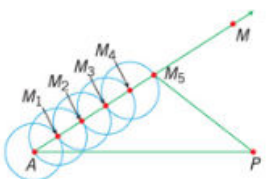
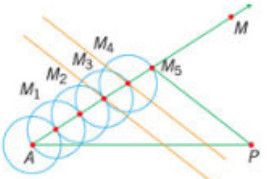

- Sin usar regla, traza y divide el siguiente segmento (\overline{AP}) en cinco partes iguales. ¿Qué estrategia usarás para dividirlo?



- Reúnete con un compañero y compartan sus estrategias. ¿Lograron dividirlo en cinco partes iguales?

© SANTILLANA

A continuación se presenta una estrategia para dividir un segmento en partes iguales. Repite los siguientes pasos en el cuaderno usando el segmento anterior.

 <p>Traza una semirrecta \overrightarrow{AM}.</p> <p>Paso 1</p>	 <p>En la semirrecta se construyen tantos círculos congruentes como partes en que se quiera dividir el segmento.</p> <p>Paso 2</p>	 <p>Une con un segmento el último punto (M_5) con P.</p> <p>Paso 3</p>
 <p>Construye rectas (o segmentos) paralelas a este último segmento (M_5P) y que pasen por los puntos M_4, M_3, \dots, M_1.</p> <p>Paso 4</p>		 <p>Los puntos de intersección entre estas rectas (o segmentos) paralelas y el segmento AP son los que dividen este segmento en 5 partes iguales.</p> <p>Paso 5</p>

- ¿Cómo podemos garantizar que, en efecto, los puntos de intersección del procedimiento descrito anteriormente dividen un segmento cualquiera en cierto número de segmentos congruentes?

Reúnete con un compañero y completen la demostración presentada en la tabla.

Afirmación	Justificación
$\overline{AM_1} \cong \overline{M_1M_2}$	Por la manera como se hizo la construcción. Los dos círculos son congruentes.
$\overline{M_1M_2} \cong \underline{\hspace{2cm}} \cong \underline{\hspace{2cm}} \cong \underline{\hspace{2cm}}$	
$\overline{M_5P} \parallel \overline{M_4A_4} \parallel \underline{\hspace{2cm}} \parallel \underline{\hspace{2cm}} \parallel \underline{\hspace{2cm}}$	
$\frac{\overline{AM_1}}{\overline{M_1M_2}} = \frac{\overline{AA_1}}{\overline{A_1A_2}}$	Por el teorema de Tales.
	Por el teorema de Tales.

Por los argumentos anteriores, en efecto, los cinco segmentos en que quedó subdividido el segmento AB son congruentes entre sí.

- Pero, ¿estos pasos podrán utilizarse para dividir un segmento en cualquier cantidad de partes? Verifiquémoslo. En el cuaderno, traza un segmento y divídelo en las partes que quieras utilizando el método anterior. ¿Lo lograste?
- Copia este mismo segmento sobre la hoja de papel calca. Encima de tu hoja rayada, colócalo de manera que el número de partes en que lo quieres dividir coincida con las líneas de la hoja. Observa en el ejemplo cómo se divide el segmento en cinco partes iguales usando una hoja rayada.
 - Argumenta geoméricamente.
- Ahora, traza tres segmentos cualesquiera en el cuaderno y divídelos en partes cuya razón sea $\frac{4}{3}$, $\frac{1}{3}$ y 0.25, respectivamente.

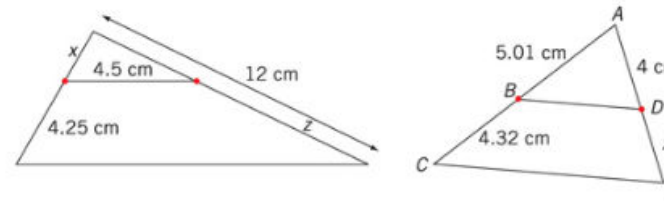
Comenten sus procedimientos con todo el grupo y con el profesor.

Consecuencia del teorema de Tales. Toda paralela a un lado de un triángulo que corta a los otros dos determina sobre estos segmentos proporcionales.

Con tu profesor y demás compañeros, analicen la afirmación anterior y planteen ejemplos que la expliquen.

Tareas

Realiza las actividades en el cuaderno. Luego, en clase, comenta tus respuestas con tus compañeros y profesor.



1. Plantea cinco ejercicios en los que se deba utilizar el teorema de Tales para su solución. Resuélvelos y llévalos a la siguiente clase.
2. Calcula el valor desconocido en las siguientes figuras.

Presentación de nuestro trabajo

Reúnete con tu equipo y revisen que todos los materiales estén listos: instrucciones, tablero y demás elementos que se requieran para jugar, como las tarjetas de respuesta. Estas deben contener no solo el resultado, sino también un procedimiento para resolver el problema. Presenten todo su material al profesor y sigan sus instrucciones para intercambiar tableros entre equipos y jugar. Al finalizar, intercambien sus experiencias respecto de los problemas, los ejercicios y las actividades propuestos por ustedes y los demás equipos.

¿Cómo nos fue?

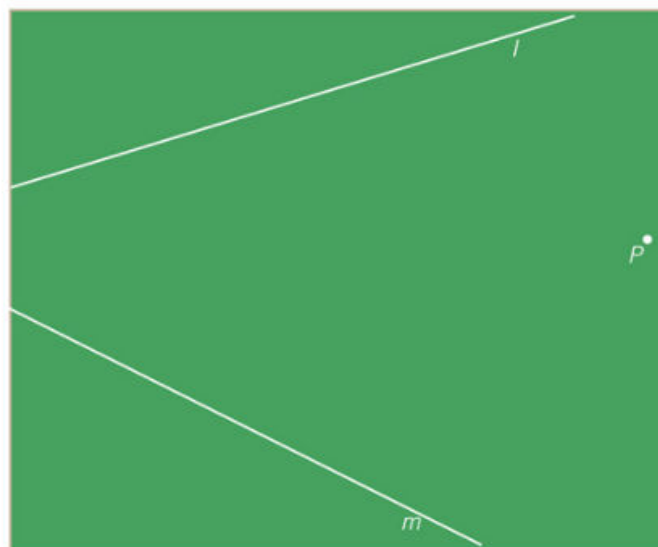
- Si tuvieras que explicar a un compañero de segundo de secundaria el teorema de Tales, ¿cómo lo harías?
- Comenta las dificultades que se presentaron y cómo las resolviste. Si aún tienes dudas, consulta al profesor.

Contenido

Aplicación de la semejanza en la construcción de figuras homotéticas.

Las rectas en el pizarrón

En equipo, lean el problema y resuélvanlo. Registren sus respuestas en el cuaderno.



La profesora de Matemáticas de tercero de secundaria puso un problema en el pizarrón: trazó dos rectas (l y m) cuya intersección quedó fuera del pizarrón y colocó un punto P . Luego, pidió a sus alumnos que construyeran la recta que pasaba por el punto P y por la intersección de las dos rectas. La única restricción era que no podían extender las rectas fuera del pizarrón.

- Describan en su cuaderno un procedimiento para construir la recta que pasa por P acatando la restricción dada.
- Luis le propuso a su maestra resolver el problema utilizando triángulos homotéticos. ¿Cómo se imaginan que se construyen dos triángulos homotéticos?
- Hay relación entre homotecia y semejanza. ¿Qué características tendrá una figura original y su homotética si su razón es igual, mayor o menor que 1 o que -1 ?

A lo largo de las actividades retomarán este problema. Antes, formen un equipo y lean en qué consiste el proyecto que realizarán durante la secuencia.

Nuestro trabajo

Organizados en equipos de tres compañeros construirán un **aparato** que genere una figura homotética de una dada. Pueden construir un proyector (usando cualquier fuente de luz), una caja negra o un pantógrafo.

- Investiguen qué materiales necesitan para construir su aparato y consíganlos. Al finalizar la secuencia presenten su trabajo al resto de sus compañeros, expliquen en qué consiste y qué tipo de homotecias se generan.

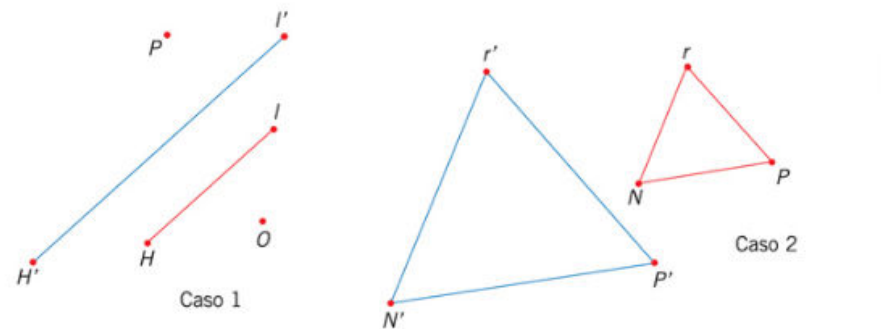
© SANTILLANA

La homotecia y sus características

En secuencias anteriores estudiamos transformaciones geométricas, como simetría, traslación y rotación. En esta secuencia estudiaremos otra transformación geométrica llamada **homotecia**. Descubramos qué características tiene, qué necesitamos conocer para generar una figura homotética de una dada y qué propiedades se conservan.

Analiza los casos y responde.

Observa los siguientes casos en los que se ha transformado, con respecto a un punto, un objeto geométrico inicial en otro (imagen). Los dos casos son el resultado de una homotecia. El objeto inicial está en rojo y su homotético, en azul.



- ¿Qué relación hay entre el objeto inicial y su imagen en cuanto a tamaño?

- En el caso 1, ¿qué relación geométrica hay entre el segmento inicial y su imagen?

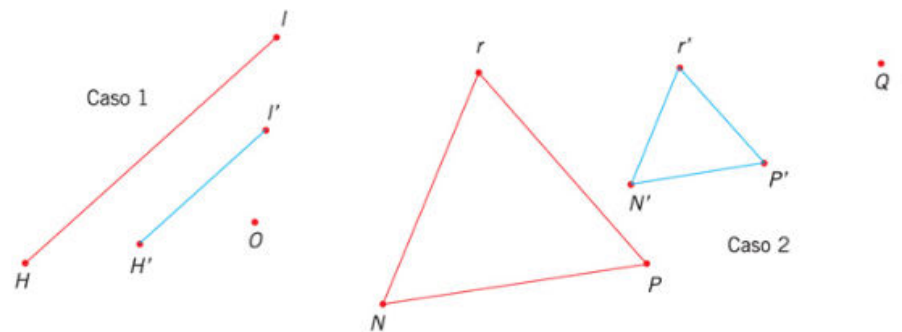
- En el caso 2, ¿qué relación geométrica hay entre cada lado del triángulo inicial y su respectiva imagen?

- En las figuras, cada punto y su imagen tienen la misma letra pero se utilizaron primas (') para diferenciarlas. Une con una recta el punto que está junto al objeto rojo (O y Q , respectivamente) con cada uno de los puntos que conforman el objeto inicial (segmento o triángulo, respectivamente). ¿Quedan sobre la misma recta el punto original y su imagen?
- Para el caso 1, calcula:
 - $\frac{OI'}{OI} =$ _____ lo que significa que $\overline{OI'} =$ _____ \overline{OI} .
 - $\frac{OH'}{OH} =$ _____ lo que significa que $\overline{OH'} =$ _____ \overline{OH} .
 - $\frac{HI'}{HI} =$ _____ de donde $\overline{HI'} =$ _____ \overline{HI} .
- Ahora analiza el segundo caso, el del triángulo, y calcula:

$\frac{Qr'}{Qr} =$ _____	$\frac{r'P'}{rP} =$ _____
$\frac{QP'}{QP} =$ _____	$\frac{P'N'}{PN} =$ _____
$\frac{QN'}{QN} =$ _____	$\frac{N'r'}{Nr} =$ _____

© SANTILLANA

- El objeto inicial y su imagen son semejantes. Escribe un argumento que sustente esta afirmación. _____
- ¿Cuál es la razón de semejanza en cada caso? _____
- ¿Qué conocimientos aprendidos en secuencias anteriores puedes utilizar para justificar esta relación de semejanza? _____
- Analiza otros ejemplos. El objeto inicial está trazado en rojo y su homotético, en azul.



- ¿Qué relación hay entre el objeto inicial y su imagen en cuanto a tamaño? _____
- En tu cuaderno realiza el mismo procedimiento que en los dos ejemplos anteriores.
- Compara tus resultados con los de un compañero y escriban qué es una homotecia y qué datos se necesitan para hacer la transformación de una figura plana en otra figura de igual forma pero de distinto tamaño.

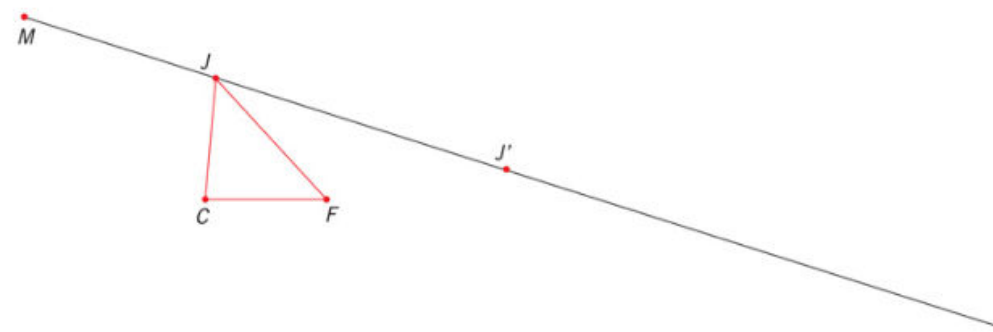
Compara tu definición de homotecia con el siguiente texto. Reescribe tu definición utilizando la terminología matemática correcta.

Una **homotecia** es una transformación geométrica de puntos en el plano (objetos iniciales) en otros puntos en el plano (imágenes). Para realizar una homotecia se necesitan dos datos: el centro de homotecia (O) y la razón de homotecia (k), donde k puede ser cualquier número real que no sea 0 (¿por qué no puede ser cero?). Simbólicamente se escribe $H_{(O, k)}$. Para el primer ejemplo, el del segmento, vemos que la razón de homotecia es 2 y el centro es O , simbólicamente $H_{(O, 2)}$. En el ejemplo del triángulo, la razón de homotecia es 2 y el centro es Q , simbólicamente $H_{(Q, 2)}$.

Homotecias positivas

En estas actividades aprenderás cuándo una homotecia es positiva. Necesitarás regla y compás.

- Traza un triángulo $J'C'F'$ que sea homotético del que se observa (JCF).



- En la figura anterior:
 - ¿Cuál es el centro de homotecia? _____ ¿Cuál es la razón de homotecia? _____
 - Analiza la siguiente afirmación y decide si es verdadera o falsa. Los triángulos JCF y $J'C'F'$ están en posición de Tales. Argumenta tu respuesta.

Quando dos figuras homotéticas están situadas del mismo lado del centro de homotecia se dice que la **homotecia es directa** y, entonces, la razón de la **homotecia es positiva** ($k > 0$).

Si O es el centro de homotecia y P es un punto que queremos transformar mediante una razón de homotecia positiva, trazamos la recta que pasa por O y por P . Después tomamos sobre esta recta el punto P' , situado a una distancia kOP del centro O , del mismo lado de O y de P .

En equipo hagan las siguientes actividades.

- Formen un equipo de cuatro integrantes. Cada uno dibuje, en una hoja cuadrículada, un cuadrado $ABCD$ con las mismas medidas. Ahora analicen qué sucede con la imagen de este cuadrado ($A'B'C'D'$) cuando la razón de homotecia es la misma pero se cambia el centro de homotecia. Cada uno elija uno de los siguientes casos y hagan el trazo como se indica.
 - Caso 1. El centro de homotecia está en el centro del cuadrado.
 - Caso 2. El centro de homotecia está en un vértice del cuadrado.
 - Caso 3. El centro de homotecia está a un centímetro de un punto del cuadrado.
 - Caso 4. El centro de homotecia está a diez centímetros de un punto que forma al cuadrado.

- Compáren resultados e intercambien opiniones; si tienen dudas, pregunten a su profesor.
- Con lo que han aprendido acerca de la homotecia y la homotecia positiva, analicen en su equipo:
 - ¿Cómo afecta la posición del centro de homotecia a la imagen obtenida? Ilústralo con ejemplos.

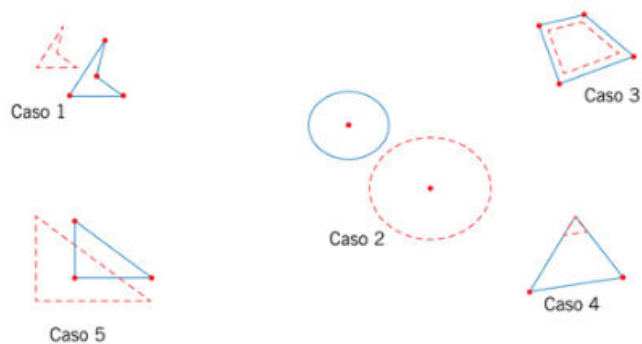
Compartan sus resultados con todo el grupo y con el profesor.

De manera individual, realiza las siguientes actividades.

- Encuentra el centro de homotecia que transforma la circunferencia grande en la pequeña. Usa regla y compás y copia la figura en tu cuaderno. Describe tu procedimiento.
 - Sugerencia: traza el diámetro en una de las circunferencias y construye el diámetro paralelo a este en la otra circunferencia. ¿Por qué funciona este procedimiento? _____



- Analiza los ejemplos de homotecias positivas. Las figuras originales son las que están en azul, y sus imágenes, después de la homotecia, son las que están punteadas de rojo. En cada caso, encuentra el centro de homotecia y márcalo. Señala los casos en que la razón de homotecia es mayor que 1 y los casos en que es mayor que 0 pero menor que 1. Después responde en el cuaderno.



- Argumenta geoméricamente cómo encontraste los centros de homotecia en las figuras anteriores.
- Escribe una estrategia para encontrar el centro de figuras homotéticas.
- Escribe una estrategia para identificar cuándo la razón de homotecia entre dos figuras homotéticas es mayor que 1 ($k > 1$).
- Escribe una estrategia para identificar cuándo la razón de homotecia entre dos figuras homotéticas es mayor que 0 y menor que 1 ($0 < k < 1$).

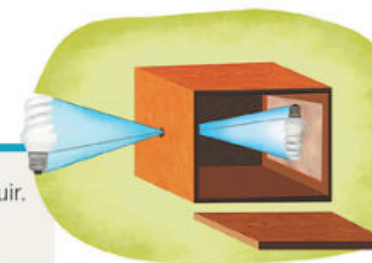
Compara tus estrategias con las de tus compañeros y, de ser necesario, vuelvan a plantearlas. Coméntelas con el profesor.

- Retoma el problema inicial de las dos rectas trazadas en el pizarrón y, encuentra su punto de intersección. A continuación te damos algunas sugerencias que te podrán ser útiles.
 - Dibuja en tu cuaderno un triángulo cuyo vértice sea P y sus otros dos vértices estén sobre las rectas m y l . Ahora construye uno que sea homotético a este y encuentra el punto P' .
 - Une con una recta los puntos P y P' , esta recta pasará por la intersección de las rectas m y l . ¿Por qué?

Comparte tus resultados con tus compañeros y con el profesor.

¿Cómo vamos?

- Reúnete con tu equipo del proyecto y decidan qué aparato van a construir. La ilustración de la derecha puede servirles de ejemplo.
- Decidan en qué lugar se van a reunir y cómo dividirán el trabajo.



Historias de vida

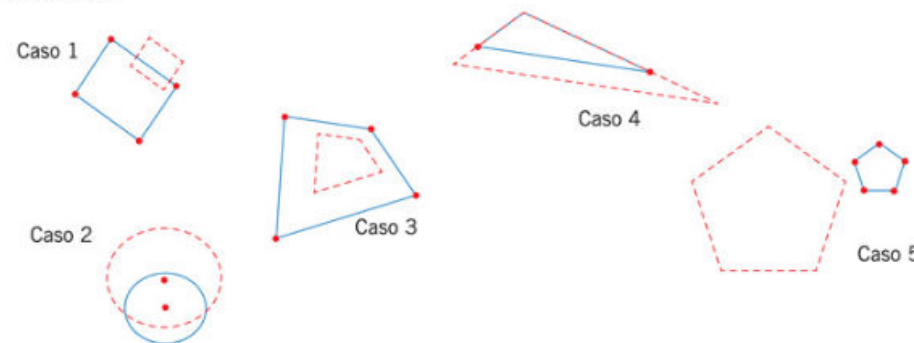


Las homotecias, al igual que otras transformaciones geométricas, han estado presentes desde tiempos de nuestros antepasados. Un ejemplo de ello es el siguiente mosaico que, incluso en la actualidad, forma parte de los tejidos de los mayas. Seguramente has visto muchos ejemplos parecidos entre los vestigios arqueológicos de las culturas mesoamericanas y en la artesanía actual de los indígenas en distintos estados de la República Mexicana.

Tareas

Realiza las actividades en tu cuaderno. Presenta tus resultados en la siguiente clase y argumenta geoméricamente tus soluciones.

1. Analiza las figuras homotéticas. Las figuras originales están en azul. Identifica en qué caso la razón es positiva, mayor que 1, mayor que 0, menor que 1 e igual a 1. Después encuentra la razón de homotecia en cada caso.

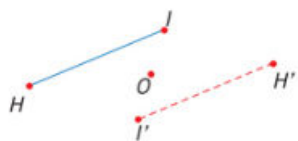


2. Construye dos ejemplos: uno de figuras homotéticas y otro donde las figuras sean semejantes pero no homotéticas. Explica qué diferencia, si la hay, encuentras entre las figuras homotéticas y las figuras semejantes.

Homotecias negativas

Caso 1

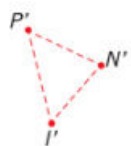
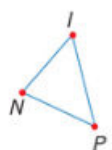
Analiza las figuras homotéticas y responde en el cuaderno.



Ya sabes que se denominan figuras homotéticas a aquellas cuyos puntos se corresponden mediante una homotecia.

- En las figuras de la izquierda cada punto y su imagen tienen la misma letra, pero para esta se utilizaron primas ('). Une con una recta el centro de homotecia (O y Q , respectivamente) con cada uno de los puntos que conforman el objeto original (segmento o triángulo, respectivamente).

Caso 2



- ¿Cómo está situado el centro de la homotecia en relación con el punto inicial y su homotético?
- ¿Son colineales el centro de homotecia, el punto original y su homotético?
- ¿Qué relación hay entre el objeto original y su imagen en cuanto a tamaño?

- Para el caso 1, calcula:

$$\frac{\overline{OI'}}{\overline{OI}} = \underline{\hspace{2cm}} \text{ lo que significa que } \overline{OI'} = \underline{\hspace{2cm}} \overline{OI}.$$

$$\frac{\overline{OH'}}{\overline{OH}} = \underline{\hspace{2cm}} \text{ lo que significa que } \overline{OH'} = \underline{\hspace{2cm}} \overline{OH}.$$

$$\frac{\overline{HI'}}{\overline{HI}} = \underline{\hspace{2cm}} \text{ de donde } \overline{HI'} = \underline{\hspace{2cm}} \overline{HI}.$$

- Ahora analiza el segundo caso, el del triángulo, y calcula.

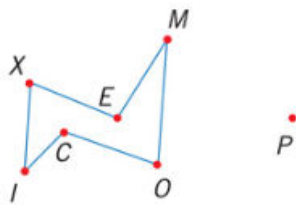
$$\frac{\overline{QI'}}{\overline{QI}} = \underline{\hspace{2cm}} \quad \frac{\overline{QP'}}{\overline{QP}} = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\frac{\overline{QI''}}{\overline{QI}} = \underline{\hspace{2cm}} \quad \frac{\overline{QP''}}{\overline{QP}} = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\frac{\overline{QI''}}{\overline{QI'}} = \underline{\hspace{2cm}} \quad \frac{\overline{QP''}}{\overline{QP'}} = \underline{\hspace{2cm}}$$

Reúnete con un compañero y construyan la figura homotética del hexágono **MEXICO**, con centro de homotecia P . Uno de ustedes utilizará $k = -2$ y el otro, $k = -\frac{1}{2}$.

- En esta secuencia han trabajado razones de homotecias negativas ($k < 0$).
 - Escriban una estrategia para diferenciar si la razón de homotecia es positiva o negativa. _____
- Escriban en el cuaderno un procedimiento para construir una figura homotética de una dada si la razón de homotecia es negativa.



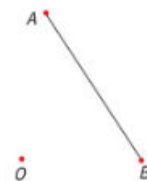
Comparen sus enunciados con el siguiente texto: si las figuras están colocadas en diferentes lados del centro de homotecia, se dice que la **homotecia es inversa** y la **razón de homotecia es negativa**. Para construir una figura homotética de una dada con una razón negativa ($k < 0$), tomamos el punto P situado a una distancia $|k|OP$ del centro O , pero del lado de la recta donde no está P .

© SANTILLANA

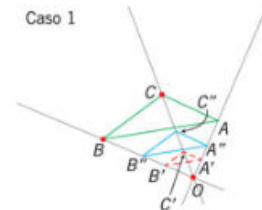
Composición de homotecias

Haz los trazos y responde.

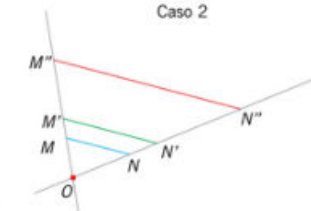
- Piensa qué sucede cuando hacemos dos homotecias sobre una misma figura con el mismo centro.
 - Efectúa, en tu cuaderno, la homotecia con centro O y razón 2 para obtener el segmento $\overline{A'B'}$.
 - Ahora, traza otra homotecia sobre $\overline{A'B'}$ con centro O y razón 1.5.
 - Utilizando una única homotecia, ¿cómo podrías obtener $\overline{A''B''}$ de \overline{AB} ?



Caso 1



Caso 2



Las siguientes homotecias también se obtuvieron de transformar sucesivamente un triángulo y un segmento original (verde) mediante dos homotecias con el mismo centro y razones diferentes (azul y roja). Prueba tu conjetura y describe en tu cuaderno el proceso seguido en cada caso.

Reúnanse en equipo y respondan en el cuaderno.

- ¿Cómo se relaciona el tamaño de la figura original y su homotética con la razón de homotecia?
- Al realizar una composición de dos homotecias con el mismo centro, ¿cuál es la razón de esta nueva homotecia? Expliquen por qué.
- Si la razón de homotecia es 1, ¿qué pasa con la figura original y su homotética?
- ¿Cuál es el único valor que no puede tener la razón de homotecia? ¿Por qué?
- ¿Cómo cambia el área de la figura original y su homotética? Explíquelo con un ejemplo.

Comenten sus resultados con el profesor y los demás compañeros. Analicen conjuntamente las propiedades que se conservan en una homotecia y escríbanlas en su cuaderno.

¿Cómo vamos?

- En su aparato, ¿qué razón homotética utilizan? ¿Qué la determina? ¿Cuál es el centro de homotecia?
- ¿Qué sucede con la figura homotética al acercarse o alejarse el objeto observado?
- ¿Cómo pueden aplicar lo aprendido para el desarrollo de su proyecto?

Presentación de nuestro trabajo

Presenten al grupo su aparato para generar figuras homotéticas.

Expliquen qué tipo de homotecia se genera y cuál es la razón de que si sean figuras homotéticas y no únicamente semejantes. Compartan con sus compañeros las dificultades que tuvieron para realizarlo.

¿Cómo nos fue?

- Decide si la siguiente afirmación es verdadera y argumentala: dos figuras homotéticas son semejantes, pero dos figuras semejantes no siempre son homotéticas.
- Escribe en tu cuaderno lo que significa homotecia y qué propiedades permanecen después de realizar esta transformación geométrica.

© SANTILLANA

Contenido

Lectura y construcción de gráficas de funciones cuadráticas para modelar diversas situaciones o fenómenos.

El costo del huerto de la escuela

Lee la siguiente situación y contesta en el cuaderno.

En una escuela consiguieron un permiso del municipio para utilizar una parte de un terreno baldío contiguo al plantel para hacer un huerto cuadrado y enseñar a los alumnos a cultivar algunas legumbres.

Para hacer el huerto, necesitan preparar la superficie del terreno: quitar las plantas, aflojar y regar la tierra; además requieren delimitarlo con una reja y comprar las semillas y las herramientas para trabajarlo. En la tabla se muestra un estimado del costo que cotizó una compañía que puede hacer el trabajo dependiendo de la medida del cuadrado del terreno. El precio incluye un cargo de \$900 por la cotización, el cual debe pagarse en caso de no contratar a la compañía, pero, si se contrata, incluye un descuento dependiendo del tamaño del huerto a construir.

Lado (m)	2.8	3.5	3.8	4	4.25	4.8	5	5.25	7
Costo (\$)	552.8	515	504.8	500	496.25	496.8	500	506.25	620

- ¿Qué sucede con el costo cuando aumenta el lado del cuadrado que se usará para la huerta?
- ¿Qué sucede con el costo cuando se aumenta la longitud del lado en un metro?
- Reflexiona. ¿Cómo sería la gráfica que represente los datos de la tabla?

Compara tus respuestas con el grupo y válidalas con el profesor.

Antes de continuar con el trabajo de la secuencia, lean la información acerca del proyecto que realizarán.

Nuestro trabajo

En pareja, deben crear un cartel que muestre una **historia** relacionada con una función cuadrática.

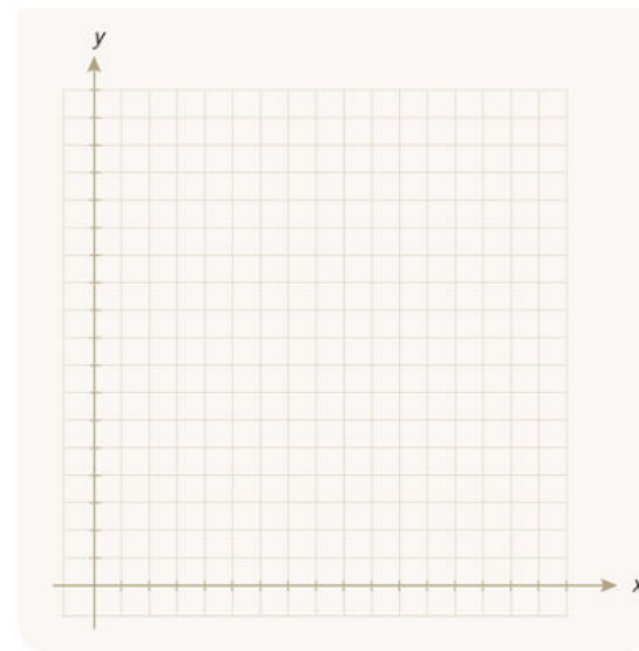
- Deben calcular los valores de la función y dibujar la gráfica correspondiente.
- Escribirán dos preguntas relacionadas con su historia que puedan responderse a partir de la gráfica.
- Necesitan una cartulina blanca para escribir la historia y una hoja de papel rayado para dibujar la gráfica.
- Al final, presentarán su cartel. Cada equipo deberá explicar su historia y responder las preguntas de otro equipo.

A lo largo de la secuencia encontrarán actividades que les ayudarán para aprender lo necesario para desarrollar su proyecto.

Datos de la construcción del huerto

Retoma el problema inicial y resuelve lo siguiente de manera individual.

- Registra los datos de la tabla de la página anterior en el plano cartesiano. El eje horizontal representa la longitud del lado del cuadrado y el eje vertical, el costo del huerto.



- Une los puntos de la gráfica.
 - Describe qué forma tiene la gráfica. _____
 - ¿La gráfica corresponde a una función lineal? ¿Por qué? _____
 - ¿Para qué longitudes del lado del cuadrado el costo del huerto aumenta? ¿Para cuáles disminuye? _____
 - ¿Para qué longitudes el costo del huerto cambia rápidamente? _____
 - ¿Para qué longitudes del cuadrado, el costo del huerto cambia lentamente? _____
 - ¿Qué pasaría si se aumentara la longitud del lado del cuadrado a 6 m? _____

A las funciones que no se representan con una línea recta se les llama **funciones no lineales**. Las **funciones cuadráticas** son un ejemplo de funciones no lineales, pero hay otras que también no lo son, por ejemplo $f(x) = x^3$ o $f(x) = \frac{1}{x}$.

- Completa las siguientes tablas, traza un plano cartesiano en tu cuaderno y grafica de rojo la función $y = x^2$, y de verde, la función $y = -x^2$.

$y = x^2$	x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
	y									

$y = -x^2$	x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
	y									

- ¿En qué se parecen las dos gráficas? _____
- ¿En qué son diferentes? _____
- ¿Cuál es el signo del coeficiente de x^2 en la función que corresponde a la curva que abre hacia arriba? ¿Y el de la curva que abre hacia abajo? _____

Compara tus respuestas con otro compañero. Si tienen dudas, pidan ayuda al profesor.

¿Cómo vamos?

Reúnanse con su compañero y trabajen en su proyecto.

Busquen en su libro o en otra fuente de información alguna función cuadrática. Analícenla para encontrar una historia que pueda ser descrita por la función.

- Hagan una tabla como la de la página 146 con valores para su función.
- ¿Cuál es la variable independiente y cuál es la variable dependiente? ¿En qué unidades se mediría cada variable?
- Calculen los valores de la variable dependiente para distintos valores de la variable independiente.
- Representen los datos de la tabla en una gráfica.
- Unan los puntos de la gráfica y describan qué forma tiene.
- Examinen la gráfica. ¿Para qué valores de la variable independiente la variable dependiente aumenta? ¿Para cuáles disminuye?
- ¿Hay valores de la variable independiente para los cuales la variable dependiente aumenta o disminuye rápidamente? ¿Hay valores para los cuales aumenta o disminuye lentamente?
- ¿Hay un punto en la gráfica en donde la variable dependiente sea mayor que en todos los demás? ¿Y menor?

© SANTILLANA

Interpolación y extrapolación

Lean en pareja la información y resuelvan.

Cuando usamos una gráfica para encontrar un dato que se encuentra entre dos datos que conocemos, hacemos **interpolación** a partir de estos últimos. La interpolación es confiable si los datos que circundan al nuevo dato son cercanos entre sí.

Cuando a partir de una gráfica inferimos el comportamiento de un fenómeno para datos que quedan fuera del intervalo en el que se hicieron las mediciones, decimos que **extrapolamos** los datos.

- Continúen trabajando con la gráfica que trazaron sobre la relación entre el costo del huerto y la longitud del lado del cuadrado.
 - ¿Hay un punto en la gráfica en el que el costo del huerto sea mayor que en todos los demás? _____
 - ¿Hay un punto en la gráfica en el que el costo del huerto sea cero? _____
 - Usen la gráfica para encontrar el costo del huerto para un cuadrado de lado 1.85 m y para una longitud del cuadrado de 0.75 m. ¿Qué tan confiable creen que sea el valor que obtuvieron? ¿Por qué? _____
- Usen la gráfica para encontrar el costo del huerto para un cuadrado de lado 2.6 m y para un cuadrado de lado 10 m.
 - ¿Qué tan confiable creen que sea el valor que obtuvieron? ¿Por qué? _____
- Ahora, elaboren en papel milimétrico o en su cuaderno, en un mismo plano cartesiano, las gráficas de las funciones $y = 2x^2$, $y = 3x^2$, $y = 4x^2$, $y = 5x^2$, $y = -2x^2$, $y = -3x^2$, $y = -4x^2$ y $y = -5x^2$.
 - Primero elaboren las tablas de datos. Usen anaranjado para las funciones con coeficiente positivo y azul para las de coeficiente negativo.
 - ¿Qué observan en las gráficas que trazaron? ¿Hacia dónde se abren las curvas con coeficiente positivo? ¿Y las de coeficiente negativo? _____
 - ¿Qué sucede con la gráfica a medida que el valor absoluto del coeficiente aumenta? ¿Cómo será la gráfica de $y = 10x^2$? ¿Y la de $y = -20x^2$? _____
 - ¿Qué sucede con la gráfica de una función $y = ax^2$ si a está entre 0 y 1? ¿Qué sucede si a está entre -1 y 0?
- Para contestar las preguntas anteriores, elaboren tablas y tracen las gráficas de $y = \frac{1}{2}x^2$, $y = -x^2$, $y = \frac{1}{4}x^2$ y $y = -\frac{1}{4}x^2$ sobre el mismo plano cartesiano.
 - ¿En qué se parecen las gráficas que elaboraron? ¿En qué son diferentes?
 - ¿Qué relaciones encuentran entre los coeficientes de x y las curvas?

Comparen sus respuestas en grupo y coméntenlas con el profesor.

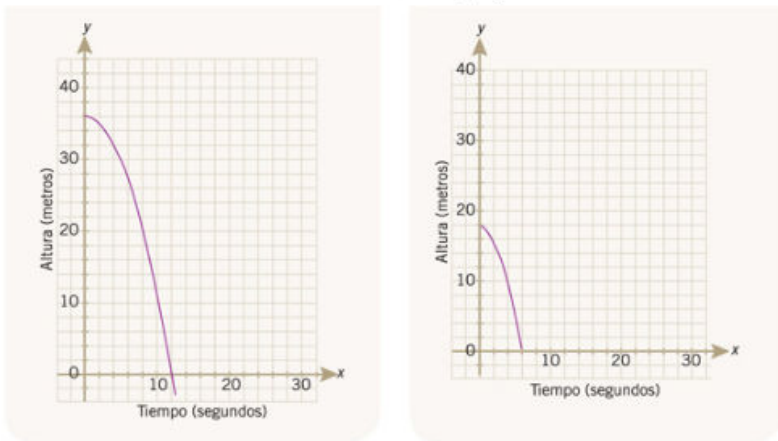
Glosario

interpolación. En una gráfica, es la obtención de nuevos puntos partiendo del conocimiento de un conjunto de datos conocidos, que se encuentran alrededor de los nuevos puntos.

Un proyectil en movimiento

Lee la siguiente situación y responde en tu cuaderno.

Lanzamiento de un proyectil



Un físico modeló el movimiento de un pequeño proyectil que se lanzaría desde cierta altura. Para ayudarse, trazó las siguientes gráficas donde relacionó la altura a la que llegaría el proyectil con el tiempo que le tomaría en llegar, en dos diferentes lanzamientos.

- ¿En qué se parecen las gráficas? ¿En qué son distintas?
- ¿A qué altura se encontraba el proyectil en cada caso, después de 3 segundos?
- ¿A cuál de las siguientes funciones corresponde cada gráfica?
 - $y = 36x^2 + \frac{1}{4}$
 - $y = \frac{1}{4}x^2 + 36$
 - $y = -\frac{1}{2}x^2 + 18$
 - $y = -\frac{1}{4}x^2 + 36$
 - $y = \frac{1}{2}x^2 - 18$
 - $y = 36x^2 - \frac{1}{4}$

Las ecuaciones de las funciones como las anteriores, pueden escribirse como $f(x) = x^2 + 1$ o como $y = x^2 + 1$.

- ¿Podrían corresponder las gráficas a ecuaciones de la forma $y = ax$? ¿Por qué?
- Compara la gráfica de una función de la forma $y = ax$ con las gráficas que corresponden a este problema. Escriban las diferencias.

Compara tus respuestas con las de tus compañeros y, juntos, lleguen a conclusiones.

¿Cómo vamos?

Reúnanse en equipos y continúen con su proyecto.

Analicen la gráfica de la función que eligieron y piensen en las preguntas que plantearán a sus compañeros.

- Escriban dos preguntas relacionadas con su historia en las que las respuestas requieran de la interpolación de la gráfica.
- Escriban dos preguntas relacionadas con su historia en las que las respuestas requieran de la extrapolación de la gráfica.
- Ilustren la historia con dibujos, con la fórmula que describe este fenómeno y con la gráfica, para que la compartan con sus compañeros.

Gráficas de funciones cuadráticas

Realiza las siguientes actividades en tu cuaderno.

- Traza un plano cartesiano y grafica las siguientes funciones:

$y = x^2$	$y = x^2 + 1$
$y = x^2 + 2$	$y = x^2 + 3$
$y = x^2 + 4$	$y = x^2 - 1$
$y = x^2 - 2$	

Antes de trazarlas, elabora las tablas correspondientes.

- ¿En qué se parecen las gráficas? ¿En qué son diferentes?
- Compara la familia de gráficas que acabas de realizar con las que graficaste en la página 149. ¿Cuáles son las diferencias y semejanzas entre ellas?
- Describe cómo es la gráfica de la función $y = x^2 + b$ cuando b es un número positivo y cómo es la gráfica cuando b es negativo.

Las gráficas de las funciones de la forma $y = ax^2$ son curvas conocidas como **parábolas verticales** con vértice en el origen, es decir, en el punto $(0, 0)$. Si a es positiva, la parábola se abre hacia arriba; si es negativa, la parábola se abre hacia abajo.

Cuanto más grande sea el valor absoluto de a , más cerrada será la parábola; cuanto más reducido sea el valor, más abierta será la parábola.

Las gráficas de las funciones de la forma $y = ax^2 + b$ son parábolas verticales cuyo vértice está en el punto $(0, b)$. Si el valor de b es positivo, el vértice se encuentra por arriba del eje x . Si el valor de b es negativo, el vértice se encuentra por debajo del eje x .

- Compara la descripción que hiciste con la definición anterior.

Analiza nuevamente la gráfica que elaboraste para el problema inicial de esta secuencia didáctica y contesta en tu cuaderno. Después resuelve el problema.

- ¿Qué función le corresponde?
- ¿Hacia dónde se abre la parábola?
- ¿Cuál es el valor mínimo del costo del huerto? ¿A qué medidas corresponde ese costo?
- Un rancho tiene veinte kilómetros de malla para cercar un terreno rectangular de pastoreo. El rancho quiere cercar tres lados del terreno adyacente a un río. Denota con x la longitud en kilómetros de los lados del rectángulo perpendiculares al río.
 - ¿Qué expresión representa el área del rectángulo en términos de x ?
 - Coloca la variable independiente en el eje horizontal y la dependiente, en el eje vertical. No olvides especificar las unidades de medida.
 - ¿En qué valores de x la función es cero? ¿Cuánto vale el área si x vale cero?
 - ¿Cuáles son los valores que x puede tomar para que la función no sea negativa, pues ello no tendría sentido en este problema?
 - ¿Cómo se comporta el área cuando se varía la longitud x ?
 - ¿En qué intervalos de valores de x es creciente o decreciente el área?
 - ¿Para qué valor de x el área del terreno es máxima?

Familias de parábolas

Realiza en tu cuaderno las siguientes actividades.

- Crea una tabla para cada una de las siguientes funciones:
 - $y = (x + 4)^2$
 - $y = -(x + 4)^2$
 - $y = (x - 4)^2$
 - $y = -(x - 4)^2$
- Determina diez valores para x , utiliza números positivos y negativos, incluye el 0. Después sobre un plano cartesiano, grafica las cuatro funciones.
 - Escribe las funciones de las parábolas que abren hacia arriba.
 - Escribe las funciones de las que abren hacia abajo.
 - ¿Cuál es la diferencia entre la gráfica de $y = x^2 + 4$ y la gráfica de $y = (x - 4)^2$?
- Si partimos de la gráfica de la función $y = x^2$, ¿cuál es el efecto del 4 al graficar $y = (x + 4)^2$? ¿Hacia dónde se desplaza la gráfica?
 - ¿Cuál es el efecto de -4 al graficar $y = (x - 4)^2$?
 - ¿Qué puedes concluir acerca de las funciones $y = (x + b)^2$? Recuerda que b puede tomar valores positivos y negativos.
- En otro plano cartesiano, grafica la siguiente familia de parábolas:

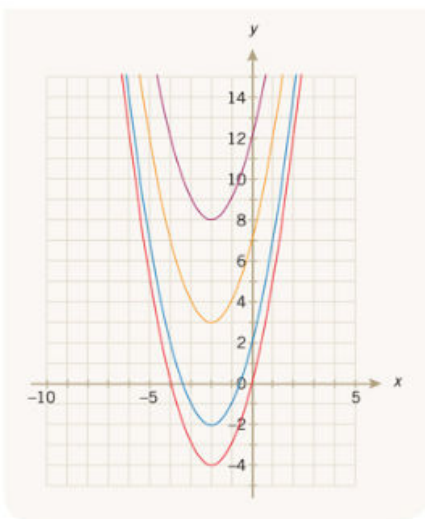
$$\begin{array}{lll}
 y = 2(x + 1)^2 & y = 4(x + 1)^2 & y = 8(x + 1)^2 \\
 y = \frac{1}{2}(x + 1)^2 & y = \frac{1}{4}(x + 1)^2 & \\
 y = -2(x + 1)^2 & y = -4(x + 1)^2 & y = -8(x + 1)^2 \\
 y = -\frac{1}{2}(x + 1)^2 & y = -\frac{1}{4}(x + 1)^2 &
 \end{array}$$

- En la gráfica de una función $y = a(x + 1)^2$, ¿qué sucede a medida que a crece con valor positivo o decrece con valor negativo?
- ¿Qué sucede cuando a es menor que 1 y mayor que cero?
- Describe cómo son las parábolas de funciones de la forma $y = (x + c)^2$.
- Relaciona cada parábola de la izquierda con la función algebraica que la representa.

- $y = (x + 2)^2 + 3$
- $y = (x + 2)^2 + 8$
- $y = (x + 2)^2 - 2$
- $y = (x + 2)^2 - 4$
- ¿Qué efecto tiene el valor de d en la gráfica de la función de $y = (x + 2)^2 - d$?

- Traza en un mismo plano cartesiano las gráficas de la siguiente familia de funciones.
 - $y = (x - 3)^2 + 1$
 - $y = -(x - 3)^2 + 4$
 - $y = -(x - 3)^2 - 2$
- ¿Cómo describirías las parábolas que graficaste?

Compara tus respuestas y tu descripción con las de tus compañeros. Después coméntenlas con el profesor.



- Grafica las siguientes funciones.
 - $y = -3(x - 2)^2 + 1$
 - $y = 2(x - 3)^2 + 4$
 - $y = -\frac{1}{4}(x - 3)^2 - 2$
- Describe cómo son las parábolas de funciones de la forma $y = a(x + c)^2 + d$.
- Elaboren la gráfica de las siguientes funciones en un mismo plano cartesiano.
 - $y = (x + 1)(x + 2)$
 - $y = (x + 1)(x + 3)$
 - $y = (x + 1)(x + 5)$
 - $y = (x + 1)(x - 2)$
 - $y = (x + 1)(x - 3)$
 - $y = (x + 1)(x - 5)$
- ¿Las parábolas son verticales u horizontales? ¿Abren hacia arriba o hacia abajo? ¿Algunas son más abiertas que otras? ¿En qué se parecen?

Comenten sus respuestas en grupo y escriban sus conclusiones en su cuaderno.

Tareas

Realiza las siguientes actividades en tu cuaderno.

- En la secuencia 5 se presenta una tabla para los ingresos mensuales de un fabricante de electrodomésticos. Elabora una gráfica con los datos de la tabla.
 - ¿A qué tipo de función corresponden?
 - Compara la gráfica con las distintas familias de parábolas que has estudiado en esta secuencia y determina a cuál de esas formas pertenece.
- Dibuja la gráfica correspondiente a la función cuadrática $f(x) = -(x - 2)(x + 1)$.
 - ¿A qué familia de parábolas de las que estudiaste pertenece esta gráfica?

Revisa la tarea en clase con ayuda de tu profesor.

Presentación de nuestro trabajo

Entreguen su cartel al profesor y sigan sus instrucciones para la presentación.

- Elijan dos de las cuatro preguntas que elaboraron y plantéenlas a sus compañeros. Identifiquen cuál es la mejor respuesta.
- Expliquen la información de la gráfica y digan cómo se relaciona con su historia.

Discutan las presentaciones en grupo y elijan la mejor historia con ayuda del profesor.

¿Cómo nos fue?

- ¿Cómo es la gráfica de una función lineal? ¿Y de una función cuadrática?
- ¿Qué dificultades encontraste al relacionar las gráficas de las parábolas con la familia a la que pertenecen?
- ¿Entendiste todas las actividades de la secuencia didáctica? ¿Podrías explicarle a un compañero cómo elaborar gráficas de funciones cuadráticas y cuál es el objeto de trazar diferentes parábolas?

Gráficas con secciones de curvas y rectas

Contenido

Lectura y construcción de gráficas formadas por secciones rectas y curvas que modelan situaciones de movimiento, llenado de recipientes, etcétera.

La velocidad de un carrito

Lee la siguiente situación y responde en el cuaderno.

El movimiento de un carrito de juguete está representado en la siguiente gráfica, en donde se relaciona el tiempo transcurrido con la distancia recorrida.



- Describe cómo cambia la velocidad del carrito a lo largo del tiempo.
- ¿Qué distancia recorrió el carrito en los primeros 2 segundos? Y en el segundo 7, ¿a dónde llegó?
- ¿Qué distancia recorrió el carrito en total? ¿Cuánto tardó?
- ¿En qué tramos o periodos la velocidad es constante? ¿En cuáles cambia?
- ¿Cómo determinaron las respuestas anteriores?

Comenten en grupo sus respuestas. Si tienen dudas, consulten a su profesor.

Antes de continuar con la secuencia, lean acerca del proyecto que desarrollarán.

Nuestro trabajo

En equipos, diseñarán un **contenedor de agua**, el cual llenarán con un recipiente más pequeño.

- Trazarán una gráfica que relacione el número de recipientes pequeños que se emplearían para llenar el contenedor con la correspondiente altura del agua en el recipiente.
- La gráfica debe contener secciones con curvas y con rectas.

A lo largo de la secuencia didáctica, en la sección “¿Cómo vamos?”, obtendrán más información para trabajar en su proyecto.

Relación tiempo-distancia

Retoma la situación inicial y realiza lo que se pide. Responde las preguntas en tu cuaderno.

- Completa las tres tablas que relacionan los valores de tiempo (t) con los de distancia (d) en cada tramo.
 - ¿Qué observas en las tablas? ¿En qué se parecen?
 - ¿En qué son distintas?
 - ¿Cuántos centímetros en total avanza el carrito en el tramo 1?
 - ¿Cuántos centímetros avanza en los tramos 2 y 3?
- Completa la cuarta tabla que indica el avance por segundo.
 - ¿Avanza el carrito la misma distancia por segundo durante todo el recorrido?
 - Analiza la distancia que recorre el carrito cada tramo. ¿En cada uno recorre la misma distancia por segundo?
 - ¿En qué tramos la velocidad en centímetros sobre segundo (cm/s) es siempre igual, es decir, se mantiene constante?
 - ¿En cuáles tramos no se mantiene constante?
- Escribe una función que relacione los centímetros recorridos por el carrito (d) con el tiempo transcurrido (t) en cada tramo.
 - ¿Qué diferencias hay entre las funciones?
 - ¿Cuál de los tramos está representado por una función cuadrática?
 - ¿Cómo es la ecuación de la función cuadrática en comparación con las otras dos funciones que son lineales?
 - Observa que en el tramo donde la función es cuadrática, la velocidad del carrito no se mantiene constante, mientras que en los tramos cuyas funciones son lineales, la velocidad sí es constante.
 - Explica por qué ocurre así.

Compara tus funciones y respuestas con las de un compañero. Identifica y analiza las diferencias en caso de haberlas.

Tramo 1	
Tiempo (s)	Distancia (cm)
0	0
1	1
2	
3	
	16

Tramo 2	
Tiempo (s)	Distancia (cm)
5	17
6	
7	
	20
9	21
10	

Tramo 3	
Tiempo (s)	Distancia (cm)
11	22
12	

Avance por segundo	
Tiempo (s)	Distancia (cm)
1	
2	
3	
4	16
5	17
6	
7	
8	
9	
10	
11	
12	

Llenado de recipientes

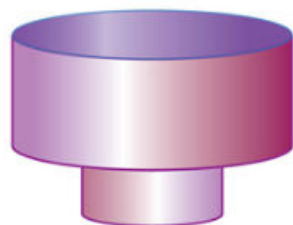
Lee lo siguiente y responde en el cuaderno.

En ocasiones, al **modelar un fenómeno** este queda representado en una gráfica mediante varias rectas o curvas asociadas con diferentes tipos de funciones. Como en el caso de la actividad inicial, puede haber rectas y curvas asociadas con funciones lineales y cuadráticas, respectivamente.

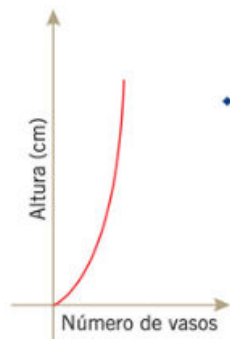
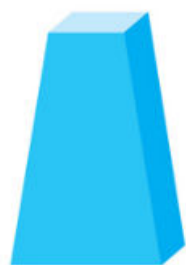
La manera en que cambia una variable con respecto a la otra, por ejemplo la distancia respecto al tiempo, es distinta cuando se trata de una recta que cuando se trata de una curva.

En la página anterior trabajaste con una situación de movimiento; ahora lo harás con una de llenado de recipientes.

- Al llenar con un vaso de agua el siguiente recipiente se elaboró la tabla de la derecha. Traza una gráfica en tu cuaderno para representar los datos.



Recipiente 1	
Número de vasos	Altura (cm)
1	5
2	10
3	12
4	14
5	16
6	18
7	20
8	22
9	24
$9 \frac{1}{2}$	25

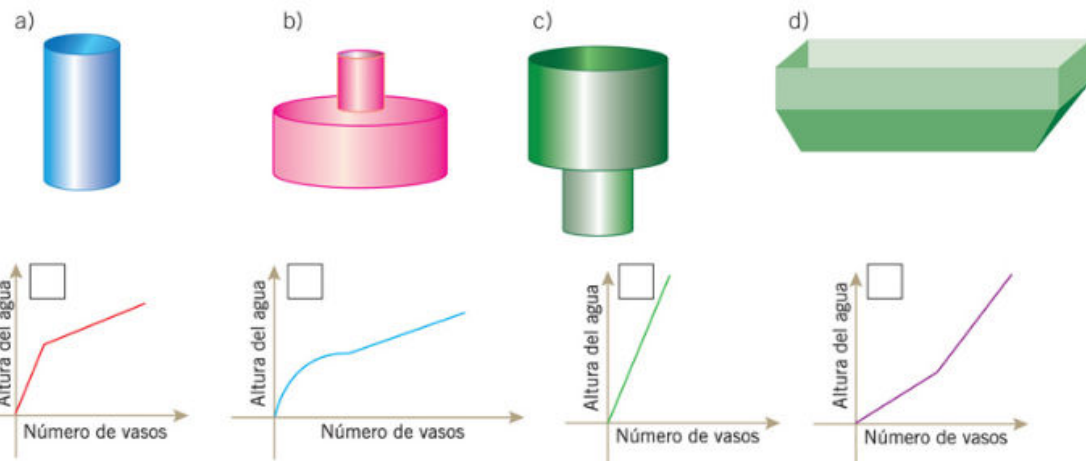


- Cuando se llenó el recipiente azul de la izquierda con el mismo vaso que se usó antes, se elaboró la gráfica que se muestra.
 - ¿Cuál es la diferencia entre las gráficas del llenado de cada recipiente?
 - ¿A qué se deben esas diferencias?
 - ¿A qué tipo de recipiente corresponde una gráfica curva? ¿Por qué?
 - ¿A qué tipo de recipiente corresponde una recta?

Observa que en el caso de la pirámide truncada el aumento en la altura del agua, a medida que se agregan los vasos, no es constante, mientras que en cada uno de los cilindros que forman el primer recipiente sí lo es.

- ¿A qué se debe lo anterior?
- Los recipientes de la siguiente página se llenaron con un mismo vaso. En parejas, analicen cada uno y decidan qué gráfica les corresponde.
 - Escriban el inciso en el recuadro correspondiente.

© SANTILLANA



- ¿Cómo decidieron a qué recipiente corresponde cada gráfica?

Comenten sus respuestas con el profesor y sus compañeros. Entre todos, resuelvan las dudas que hayan surgido.

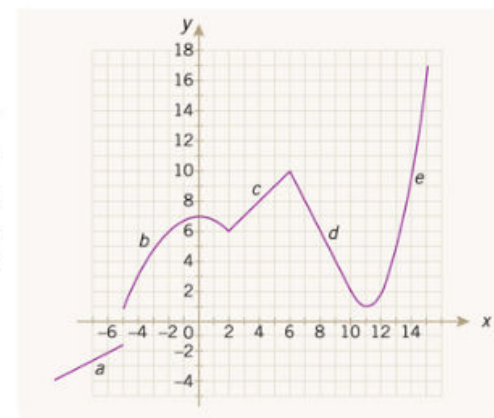
Gráficas con rectas y curvas

Observa la gráfica y responde.

- ¿Cuántas secciones distintas hay en la gráfica? _____
- ¿Cuáles secciones son rectas? _____
- ¿Cuáles son curvas? _____

- Las siguientes ecuaciones corresponden a las secciones de la gráfica. Rodea las que corresponden a funciones lineales.

- $y = x + 4$
- $y = (x - 11)^2 + 1$
- $y = \frac{1}{2}x + 1$
- $y = -\frac{1}{4}x^2 + 7$
- $y = -2x + 22$



- Observa en la gráfica la parte que corresponde a valores de x menores que -5 , es decir, la sección a .
 - ¿A cuál de las ecuaciones que rodeaste le corresponde esta sección? ¿Cómo lo supiste? _____
 - ¿A cuál ecuación corresponde la sección c de la gráfica? _____
 - Hay dos ecuaciones cuadráticas. ¿Cuál de las dos corresponde a la sección b ? ¿Por qué? _____
 - Escribe la ecuación que corresponde a la sección e . _____

© SANTILLANA

Compara tus respuestas con las de tus compañeros y, juntos, lleguen a conclusiones.

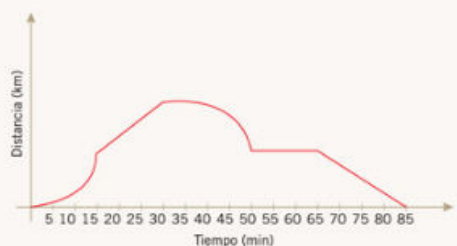
¿Cómo vamos?

Reúnete con tu equipo para retomar el trabajo del proyecto.

- Para el recipiente que diseñarán incluyan formas para graficar secciones rectas y curvas, es decir, debe tener partes que se llenen de manera diferente.
- Pueden utilizar un envase ya hecho, con la condición de que tenga distintas formas para cumplir con las características que se piden.
- Terminen el diseño de su recipiente, si es el caso, y elaboren la gráfica que represente la relación entre el número de vasos o recipientes pequeños con la altura del agua en el recipiente.

Tareas

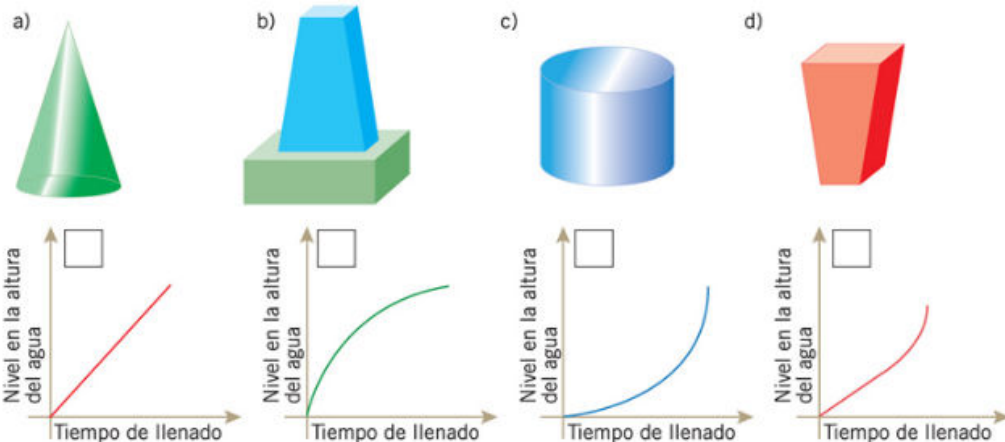
Realiza las siguientes actividades en tu cuaderno. Justifica tus respuestas.



1. La gráfica de la izquierda representa la distancia que recorrió un automóvil. Determina si las siguientes afirmaciones son falsas o verdaderas.
 - a) Al inicio del recorrido, la velocidad del auto era constante.
 - b) Del minuto 10 al 15, la razón entre la distancia y el tiempo fue siempre la misma.
 - c) A partir del minuto 15, la velocidad aumentó.

- d) Del minuto 50 al minuto 65, el auto estuvo estacionado.
- e) A partir del minuto 65, la velocidad del auto fue disminuyendo.
- f) La velocidad en el último tramo fue constante.

2. Relaciona cada envase con la gráfica que representa su llenado. Considera que se llenan con una manguera de la que sale la misma cantidad de agua cada segundo. Escribe el inciso en los recuadros.



Revisen la tarea en grupo con la supervisión del profesor. Corrijan sus errores en caso de haberlos.

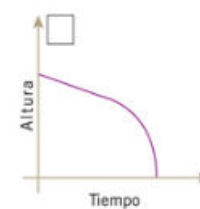
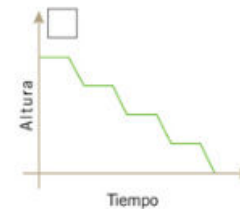
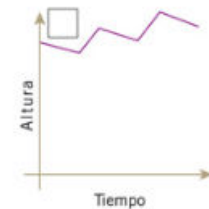
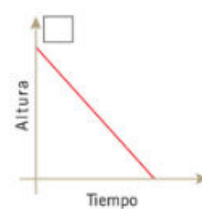
© SANTILLANA

Relación tiempo-altura

Resuelve con un compañero.

Unos trabajadores limpiavidrios utilizan un andamio para lavar las ventanas de un edificio. Supongan que la velocidad de movimiento del andamio es constante y que empezaron el trabajo por el último piso.

- Determinen cuál de las gráficas muestra la altura del andamio con respecto al suelo, en relación con el tiempo. Consideren que los limpiavidrios se detuvieron a hacer su trabajo en cada piso del edificio. Marquen con una el recuadro correspondiente.



- ¿Cómo eligieron la gráfica?
- Expliquen por qué las otras gráficas no representan el movimiento del andamio.

Comparen sus respuestas con las de otra pareja. Si tienen dudas, consulten a su profesor.

Presentación de nuestro trabajo

Presenten al profesor y al grupo su contenedor de agua y comenten las características tanto del recipiente como de las gráficas que trazaron.

- Verifiquen que la gráfica de otros compañeros corresponda al recipiente y que además incluya secciones rectas y curvas.
- ¿Qué dificultades tuvieron al realizar el diseño de los recipientes y las gráficas?
- ¿Cómo son las partes de los recipientes cuya gráfica corresponde a una recta? ¿Y las de aquellos cuya gráfica corresponde a una curva? ¿Qué otros tipos de gráfica encontraron?

Comparen los distintos recipientes que diseñaron y sus gráficas. Analicen sus semejanzas y diferencias, y escriban sus conclusiones en el cuaderno.

¿Cómo nos fue?

- ¿Qué estrategias utilizaste para trazar las gráficas?
- ¿Cómo cambia una variable al cambiar la otra cuando la gráfica es una recta?
- ¿Cómo cambia una variable al cambiar la otra cuando la gráfica es una curva?
- ¿Cómo utilizaste lo que aprendiste sobre gráficas para diseñar tu recipiente?
- Escribe un ejemplo de una situación que puedas representar mediante una gráfica formada por secciones rectas y curvas.

© SANTILLANA

Probabilidad de eventos independientes

Contenido

Cálculo de la probabilidad de ocurrencia de dos eventos independientes (regla del producto).

¿Afecta o no afecta?

Lee la información y responde en tu cuaderno.

Juan y Pedro juegan a lanzar dos monedas al aire. Juan dice que al menos en una moneda va a caer sol. Luego discuten sobre cuál es la probabilidad de que ocurra el resultado que mencionó Juan.

- ¿Cuál es la probabilidad de que al lanzar una moneda caiga sol?
- Si se lanzan las monedas por separado, ¿el resultado de una moneda afecta el resultado de la otra?
- Si se lanza primero una moneda y cae águila, ¿cuál es la probabilidad de que en la segunda moneda caiga sol?
- ¿Cuál es la probabilidad de que en ambas monedas caiga sol?
- ¿Cuál es el espacio muestral al tirar dos monedas al aire?
- El hecho de que por lo menos en una moneda caiga sol, ¿influye en la probabilidad de que ambas sean soles?

Comenta tus respuestas con tus compañeros y con tu profesor.

Antes de continuar con el trabajo de la secuencia, reúnete en equipo para leer la información referente al proyecto que realizarán.

Nuestro trabajo

En equipos van a realizar un análisis con probabilidades del problema de Monty Hall, y así tomar una decisión para obtener el premio.

- Deberán calcular cuál es la probabilidad de ganar el premio en dicho concurso.
- Deben presentar un informe en el que expliquen qué es lo más conveniente al participar en este juego de azar.
- A lo largo de la secuencia, en las secciones "¿Cómo vamos?", encontrarán más información del problema de Monty Hall, para llevar a cabo su proyecto.



Monedas al aire

Reúnete con tu equipo y realicen las actividades.

- Completen el diagrama de árbol que muestra los posibles resultados de lanzar dos monedas. Consideren S = sol y A = águila.
 - Completen el espacio muestral del lanzamiento de dos monedas:

SS, _____, _____, _____

- Al saber que una de las monedas cae sol, ¿cuál es el espacio muestral que ayuda a calcular la probabilidad de dicho evento? _____
- ¿Es el mismo espacio muestral que el primero o cambió? ¿Por qué? _____

Saber que por lo menos una de las monedas cae sol, nos lleva a eliminar la opción AA (águila, águila), ya que en ninguna de las monedas saldrá sol.

- Por lo que ahora nuestro espacio muestral para calcular la probabilidad de que la otra moneda sea sol es: _____
- Un estudiante de 2.º de secundaria, al resolver este problema, contestó que la probabilidad de que la otra moneda caiga sol es de 50%.
 - ¿Están de acuerdo? ¿Por qué? _____
 - Entonces, ¿cuál es la probabilidad de que la otra moneda caiga en sol? _____

Comparen sus respuestas con las de sus compañeros.

¿Cómo vamos?

Reúnete con tu equipo para leer la información del concurso de Monty Hall.

En el concurso se presentan tres puertas a un concursante. Detrás de una de ellas hay un coche y en las otras dos, una cabra, como se muestra en la imagen de la derecha.

El concursante debe elegir una de las tres puertas; una vez que la selecciona, antes de abrirla, el presentador del programa abre, de las otras dos puertas, la que no tiene premio y le pregunta: ¿Estás seguro que quieres abrir esa puerta? ¿Quieres cambiarla? El presentador sabe dónde está el coche y el concursante puede cambiar de puerta.

- Comenten si al concursante le conviene cambiar de puerta.
- ¿Cuál es la probabilidad de ganar el automóvil en el concurso de Monty Hall?
- Registren sus acuerdos para la presentación de su análisis.



El problema de la urna I

Lee la información y resuelve con un compañero.

Se tiene una urna con dos bolas blancas y dos bolas negras. Sin ver el contenido, se extrae una bola blanca. Se devuelve a la urna y se saca al azar una segunda bola.

- ¿Cuál es la probabilidad de que la segunda bola extraída sea blanca? Expliquen su respuesta. _____
- ¿Afecta que la primera bola sea blanca la probabilidad de que la segunda también sea blanca? ¿Por qué? _____

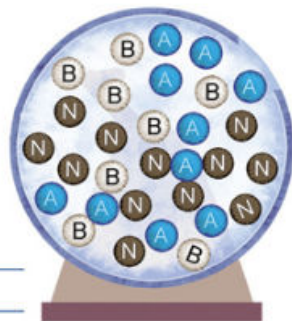
- Completen en su cuaderno el diagrama de árbol con el espacio muestral para el problema de la urna. Después respondan.
 - La primera extracción, ¿cuál es la probabilidad de sacar una bola blanca?
 $P(B) = \underline{\hspace{2cm}}$
 - En la segunda vez, ¿cuál es la probabilidad de que la bola sea blanca?
 $P(B) = \underline{\hspace{2cm}}$
 - Calculen la probabilidad teórica de que ocurra el evento: "las dos bolas sean blancas".
 $\underline{\hspace{2cm}}$
- Multipliquen las probabilidades de los eventos: "en la primera extracción la bola es blanca" y "en la segunda extracción la bola es blanca".
 - $P(B \text{ y } B) = P(B) \times P(B) = \underline{\hspace{1cm}} \times \underline{\hspace{1cm}} = \underline{\hspace{1cm}}$
- Comparen la probabilidad de que ocurra el evento: "las dos bolas son blancas" con la multiplicación de las probabilidades de cada extracción: "en la primera extracción la bola es blanca" y "en la segunda extracción la bola es blanca".
 - ¿Son iguales o son diferentes? $\underline{\hspace{2cm}}$

Dos o más eventos aleatorios son **independientes**, cuando el resultado de uno de ellos no afecta la probabilidad de que suceda el otro. Cuando dos eventos son independientes, la probabilidad de que ocurran ambos: $P(A \text{ y } B)$, es igual al producto de $P(A)$ por $P(B)$, es decir, $P(A \text{ y } B) = P(A) \times P(B)$.

Tareas

Resuelve los siguientes problemas aplicando tus conocimientos de la probabilidad de eventos independientes.

1. Al tirar cinco veces una moneda al aire se obtuvieron los siguientes resultados [sol (S), águila (A)]: S, S, A, A, A. ¿Cuál es la probabilidad de que la siguiente vez que se tire la moneda al aire, el resultado sea sol? $\underline{\hspace{2cm}}$
2. Si se lanza una moneda dos veces, ¿cuál es la probabilidad de que en la primera tirada caiga águila y en la segunda, sol? $\underline{\hspace{1cm}}$ y $\underline{\hspace{1cm}}$.
3. En una urna hay 30 pelotas de colores, como se muestra: 12 son negras, 10, azules y el resto son blancas. En todos los casos, se extrae una pelota y se regresa a la urna antes de hacer la siguiente extracción.



¿Cuál es la probabilidad de sacar...

- a) dos negras, cinco azules y dos blancas?
 $\underline{\hspace{2cm}}$

- b) tres blancas, dos negras y dos azules?
 $\underline{\hspace{2cm}}$

- c) ocho azules, tres blancas y cinco negras?
 $\underline{\hspace{2cm}}$

© SANTILLANA

El problema de la urna II

Resuelve con un compañero las siguientes actividades.

Se tiene una urna con dos bolas rojas y una bola azul. Se saca una bola al azar. Y sin reponerla en la urna, se saca una segunda bola.

- ¿Cuál de estos sucesos es más probable? Enciérrenlo.
 - Sacar dos bolas rojas. $P(R \text{ y } R)$.
 - Sacar primero una bola roja y luego una azul: $P(R \text{ y } A)$.
- ¿Cuál es la probabilidad de sacar en la primera extracción una bola roja?
 - Considerando el evento anterior y que no hay reemplazo, calculen la probabilidad de que en la segunda extracción la bola sea roja. $P(R) = \underline{\hspace{2cm}}$
 - La primera extracción y que no se devuelva la bola a la urna, ¿afecta la probabilidad de que la segunda extracción sea roja? ¿Por qué? $\underline{\hspace{2cm}}$
- Considerando que se saca una bola roja en la primera extracción y que no hay reemplazo, calculen la probabilidad de que en la segunda extracción la bola sea azul. $P(A) = \underline{\hspace{2cm}}$
- La primera extracción y que no se devuelva la bola a la urna, ¿afecta la probabilidad de que la segunda extracción sea azul? ¿Por qué?
 - Expliquen por qué en estos casos la probabilidad de la primera extracción afecta la probabilidad del color de la segunda bola. $\underline{\hspace{2cm}}$
- ¿Qué pasaría si la bola de la primera extracción se devolviera a la urna? $\underline{\hspace{2cm}}$

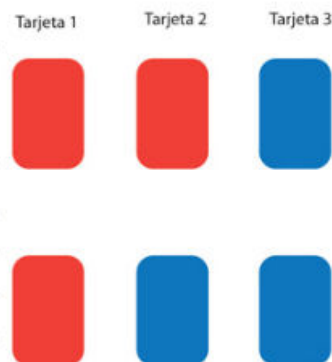
Comparen sus respuestas con las de otros compañeros y registren sus acuerdos acerca de lo realizado en la actividad.

Cuando ocurre un evento y afecta la probabilidad de que suceda otro, se dice que los eventos son **dependientes**.

El problema de las tarjetas

Reúnete con tres compañeros y resuelvan mediante simulación lo siguiente.

Hagan las tarjetas que se muestran y simulen la situación. En una urna hay tres tarjetas, se selecciona una al azar y se pone sobre la mesa tal y como la sacamos de la urna, sin mostrar la otra cara.



- Si la cara que vemos es roja, ¿cuál es la probabilidad de que la otra cara también sea roja? $P(R \text{ y } R) = \underline{\hspace{2cm}}$
- Argumenten su respuesta. $\underline{\hspace{2cm}}$

© SANTILLANA

- Ahora, realicen mediante un juego la simulación del concurso de Monty Hall.
 - Necesitan tres tarjetas (dos tarjetas con el dibujo de una cabra y la otra con un automóvil).
 - Uno de los integrantes del equipo colocará las tres tarjetas cara abajo, él si sabrá donde está el automóvil.
 - Por turnos, cada jugador tomará al azar una tarjeta, en la que considere que está el automóvil.
 - El alumno que colocó las tarjetas, da vuelta a una de las tarjetas en la que hay una cabra, y le preguntará al jugador en turno: *¿Quieres cambiar la tarjeta que has elegido?*
 - El jugador decidirá si cambia o no su elección, y dará vuelta a la tarjeta.

Utilicen las estrategias que se mencionan a continuación.

Estrategia 1. No cambiar la elección de la tarjeta.

- Jueguen en total treinta veces, diez veces cada participante, y completen la tabla.

Nombre del jugador	Núm. de veces que gana	Núm. de veces que no gana	Total de jugadas	Probabilidad de ganar = núm. de veces que ganó/total de jugadas
			10	
			10	
			10	
Total			30	

Estrategia 2. Cambiar la elección de la tarjeta que había escogido el participante.

- Jueguen otras treinta veces y completen una tabla similar a la anterior en su cuaderno.
- Con base en los datos obtenidos por cada equipo, completen dos tablas como la que se presenta a continuación, una para cada estrategia.

Nombre del equipo	Frecuencia: gana	Frecuencia: no gana	Total de jugadas	Probabilidad de ganar = núm. de veces que ganó/total de jugadas
			30	
			30	
Total				

- Comparen las probabilidades que dieron al inicio, antes de realizar el juego, con los resultados que obtuvieron.
- Cada equipo dará una explicación de los resultados obtenidos.

Espacio tecnológico

En Internet también hay varios sitios donde se aplica la probabilidad de eventos independientes o dependientes, como en el concurso de Monty Hall. Incrementa tus habilidades interactuando con un simulador de Internet. Un sitio en el que puedes encontrar este problema es:

www.estadisticaparatodos.es/taller/montyhall/montyhall.html#00 (consulta: 23 de diciembre de 2016, 11:44 horas)

© SANTILLANA

¿Cómo vamos?

Reúnete con tu equipo y respondan.

- ¿Se trata de un problema de dos eventos independientes? ¿Por qué?
- ¿Podrían utilizar un diagrama de árbol para el concurso de Monty Hall?
- ¿Qué tiene que pasar para que este problema sea de eventos independientes?
- ¿Cuál es la probabilidad de ganar el automóvil?
- ¿Qué puede suceder si ante la pregunta del presentador del programa de cambiar de puerta, el concursante decide no cambiar?
- Si el concursante no cambia de puerta y en la que eligió está el coche, gana.
- Pero si no cambia y en esa puerta hay una cabra, pierde. ¿En cuál de las decisiones, cambiar o no cambiar, hay mayor probabilidad de ganar?
- Al mostrar una puerta con una cabra, ¿cambia la probabilidad de ganar?
- ¿Da lo mismo cambiar o no cambiar de puerta? ¿Por qué?
- Registren sus conclusiones y trabajen en la parte final de su análisis.

Tareas

Resuelve los siguientes problemas de probabilidad.

- Se seleccionan al azar tres bolas de la siguiente urna.
 - Calcular la probabilidad de seleccionar al azar tres bolas: una roja (R) en la primera selección, una verde (V) en la segunda y una bola azul (A) en la tercera.
 - Suponiendo que cada bola se devuelve a la urna antes de seleccionar las siguientes bolas. $P(R \text{ y } V \text{ y } A) = \underline{\hspace{2cm}}$
 - Suponiendo que ninguna de las bolas que se seleccionaron se devuelven a la urna antes de que las otras sean elegidas. $P(R \text{ y } V \text{ y } A) = \underline{\hspace{2cm}}$



Reúnete con tu equipo y compara lo que hiciste de tarea. Corrige lo que sea necesario.

Presentación de nuestro trabajo

Cada equipo presente al grupo su análisis y la decisión que tomó. Justifiquen su elección utilizando la probabilidad de eventos independientes o dependientes.

- ¿Qué decisión tiene mayor probabilidad de ganar, cambiar o no cambiar de puerta?
- ¿Cómo creen que son los eventos o sucesos que aparecen en este problema?

En grupo lleguen a acuerdos y registren sus conclusiones.

¿Cómo nos fue?

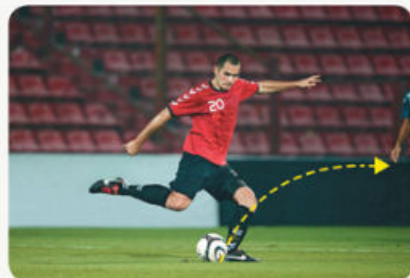
- En una situación azarosa, ¿cuándo dos eventos son independientes?
- Describe tres situaciones de la vida cotidiana en donde se utilice la probabilidad de eventos independientes.
- ¿Cómo se calcula la probabilidad de dos o más eventos independientes?
- ¿Cuándo dos eventos son dependientes?

© SANTILLANA

Cierre

Evaluación tipo PISA

UNIDAD: El despeje



Una fórmula asociada con la caída libre es la altura (h) que alcanza un objeto t segundos después de haber sido lanzado hacia arriba con una velocidad inicial de v_0 metros por segundo. La altura aproximada se obtiene con la fórmula

$$h = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2, \text{ donde } g = 9.8 \text{ m/s}^2.$$

Considera que un futbolista patea un balón que está detenido en el campo de juego y este sale con una velocidad de 19.6 m/s.

Pregunta 1: EL DESPEJE

Contexto: Científico

Aprendizaje esperado: Resuelve problemas que implican el uso de ecuaciones de segundo grado.

¿Qué altura alcanza el balón un segundo después de haber sido pateado?

- a) 19.6 m b) 14.7 m c) 9.8 m d) 4.9 m

Pregunta 2: EL DESPEJE

Contexto: Científico

Aprendizaje esperado: Resuelve problemas que implican el uso de ecuaciones de segundo grado.

Cuando $t = 0$, h también es igual a cero. ¿Qué significa lo anterior?

Respuesta: _____

Pregunta 3: EL DESPEJE

Contexto: Científico

Aprendizaje esperado: Resuelve problemas que implican el uso de ecuaciones de segundo grado.

¿Cuánto tiempo tarda ese balón en caer nuevamente al suelo? Escribe todas las operaciones que realizaste.

Respuesta: _____

Pregunta 4: EL DESPEJE

Contexto: Científico

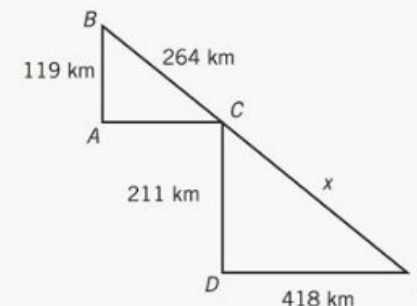
Aprendizaje esperado: Resuelve problemas que implican el uso de ecuaciones de segundo grado.

¿Cuánto tiempo transcurre desde que el futbolista despeja el balón hasta que este alcanza una altura de 18.375 m?

Respuesta: _____

UNIDAD: El recorrido

José maneja un tráiler y hace recorridos entre distintas ciudades llevando carga. La última entrega la hizo de la ciudad A a la ciudad B. En unos días, llevará una carga a la ciudad E y quiere saber la distancia que recorrerá. La imagen ilustra la distancia entre las ciudades.



Pregunta 1: EL RECORRIDO

Contexto: Laboral

Aprendizaje esperado: Resuelve problemas de congruencia y semejanza que implican utilizar estas propiedades en triángulos o en cualquier figura.

¿Qué distancia recorrerá José de la ciudad B a la E? Justifica tu respuesta.

Pregunta 2: EL RECORRIDO

Contexto: Laboral

Aprendizaje esperado: Resuelve problemas de congruencia y semejanza que implican utilizar estas propiedades en triángulos o en cualquier figura.

Analiza el procedimiento que siguió Jacobo para calcular la distancia BE .

Para responder la pregunta anterior, Jacobo propuso el siguiente procedimiento.

Dado que los triángulos son semejantes:

- i. Establezco la relación entre los lados para encontrar el valor de x :

$$\frac{x}{211} = \frac{119}{418}$$

- ii. Obtengo el valor de x .
iii. Sumo el valor de los segmentos BC y CE para obtener el valor de BE .

¿El procedimiento de Jacobo es correcto? Escribe tus operaciones y justifica tu respuesta.

Bloque 4

Como resultado del estudio de este bloque temático se espera que:

- Utilices en casos sencillos expresiones generales cuadráticas para definir el n ésimo término de una sucesión.
- Resuelvas problemas que impliquen el uso de las razones trigonométricas seno, coseno y tangente.
- Calcules y expliques el significado del rango y la desviación media.

Pendiente de una montaña

Para los alpinistas y escaladores resulta necesario saber qué tan inclinada es la ladera de una montaña. Es decir, conocer la pendiente del terreno (a mayor pendiente, mayor dificultad para escalar la montaña). La pendiente se determina por medio del porcentaje de inclinación, y si se quiere obtener en grados, se aplica la fórmula de la tangente.

Sucesiones numéricas y figurativas

Contenido

Obtención de una expresión general cuadrática para definir el n ésimo término de una sucesión.

Los racimos de uvas

Resuelve la siguiente actividad en el cuaderno.

Los siguientes racimos de uvas forman una **sucesión**. Cuenta las uvas que hay en cada uno y contesta.



- Si continúa la sucesión, ¿cuántas uvas tendrá el siguiente racimo?
- ¿Cuántas uvas habrá en el décimo racimo?
- ¿Qué hiciste para determinar lo anterior?
- ¿Puedes conocer datos como la cantidad de uvas que habrá en el racimo 50 o en qué racimo habrá 90 uvas? ¿Por qué?
- ¿Qué información necesitas o cómo podrías conocer los datos anteriores?
- ¿Qué tipo de sucesión representan los racimos de uvas?

Comenta tus respuestas con el grupo y con el profesor. Resuelve las dudas y llega a conclusiones.

A continuación podrás leer la descripción del proyecto que llevarás a cabo durante la secuencia.

Nuestro trabajo

En equipos de cuatro integrantes, diseñarán una **sucesión generada por una sucesión cuadrática**.

Deberán entregar un informe de datos en el que presenten:

- la fórmula que genera la sucesión.
- la cantidad de elementos que contienen los términos 10 y 50 de la sucesión.
- el término con 100 elementos de la sucesión si es que lo hay. Si no, deberán explicar por qué no puede haber un término con esa característica en su sucesión.

Además harán una maqueta en la que representen con figuras los cuatro primeros términos de su sucesión.

- Necesitarán un pliego de papel cascarón y material reciclable o de reúso. Cada equipo presentará su sucesión frente al grupo, y sus compañeros deberán encontrar la fórmula que la origina. A lo largo de la secuencia obtendrán la información que necesitan para desarrollar su proyecto.

Glosario

sucesión. Es un conjunto ordenado de números o figuras, donde a cada uno se le denomina término de la sucesión.

¿Cuántas uvas hay?

Retoma la sucesión de la página anterior y resuelve.

- Completa la tabla de datos. Encuentra la diferencia entre los elementos de los términos consecutivos:

Racimo	1	2	3	4	5
Cantidad de uvas	2		12		30
Diferencia			6		

- Analiza la información de tu tabla y contesta en tu cuaderno.
 - ¿Qué observas? ¿Es constante la diferencia?
 - Si la diferencia entre un término y el siguiente hubiese sido la misma, es decir, si fuera constante, ¿qué significaría respecto al tipo de sucesión?
- Encuentra las primeras diferencias, después las segundas y completa la tabla.

Racimo	1	2	3	4	5
Cantidad de uvas	2		12		30
Primeras diferencias	$6 - 2 = \underline{\quad}$	$12 - 6 = 6$	$20 - 12 = \underline{\quad}$	$30 - 20 = \underline{\quad}$	
Segundas diferencias		$6 - 4 = \underline{\quad}$	$8 - 6 = \underline{\quad}$	$10 - 8 = \underline{\quad}$	

- ¿Qué puedes concluir a partir de lo observado en esta tabla?
- ¿Cómo son las segundas diferencias?
- ¿Puedes encontrar otra sucesión en la que ocurra lo mismo?
- Observa que estas sucesiones son distintas de las que conocías. ¿Cómo puedes describir la diferencia entre ellas?

Cuando en una sucesión las segundas diferencias entre términos consecutivos son constantes decimos que se trata de una **sucesión cuadrática**, porque está generada por una expresión de la forma: $ax^2 + bx + c$, donde x está elevada al cuadrado y representa el lugar que le corresponde a un término de la sucesión.

- Si elevas el número del segundo término (2) al cuadrado, ¿qué necesitas hacer para igualar ese valor con el número de uvas?
- ¿Qué pasa en el caso del cuarto término (4) si lo elevas al cuadrado?
- ¿Qué expresión algebraica representa la regla de la sucesión?
- Utiliza la expresión para comprobar tus respuestas de la actividad inicial.
 - ¿En qué racimo habrá 90 uvas?
 - ¿Cuántas uvas habrá en el racimo número 50?

Compara las fórmulas que escribiste para generar la sucesión de la actividad inicial y elige la correcta.

¿Cómo vamos?

Reúnete con tu equipo y comiencen a trabajar en su proyecto.

- Piensen qué sucesión quieren representar. Recuerden que debe ser cuadrática.
- Decidan qué material van a utilizar para su maqueta.
- Empecen a recolectarlo entre todos los miembros del equipo.

Método de las diferencias. Caso 1

Contesta las preguntas de manera individual en el cuaderno.

- Observa la sucesión 3, 6, 11, 18, 27,...

En las sucesiones lineales o aritméticas que has estudiado en grados anteriores, la diferencia entre términos consecutivos es constante y esta diferencia permite encontrar la regla de la sucesión.

- ¿Sirve este procedimiento para la sucesión de arriba? ¿Por qué?
- ¿Encuentras algún patrón entre los términos de la sucesión formada por las diferencias que calculaste? Verifícalo.
- Completa la tabla, encuentra las diferencias.

Posición del término (x)	1	2	3	4	5
Término de la sucesión	3	6	11	18	27
Primera diferencia					
Segunda diferencia					

- ¿Cómo se puede encontrar la regla general de esta sucesión numérica?

Busca los coeficientes de esa expresión utilizando tus conocimientos de ecuaciones cuadráticas. Recuerda que la forma general de la ecuación cuadrática es $ax^2 + bx + c = d$. Cada término de la sucesión es x y se deben encontrar a , b y c .

En la primera posición de la sucesión ($x = 1$), el término es 3, por tanto:

$$a(1)^2 + b(1) + c = 3; a + b + c = 3 \text{ (primera ecuación)}$$

Para la segunda posición, el valor de x será 2 y el término de la sucesión es 6, por tanto:

$$a(2)^2 + b(2) + c = 6; 4a + 2b + c = 6 \text{ (segunda ecuación)}$$

Para la tercera posición hay 11 elementos y tenemos $x = 3$, por tanto:

$$a(3)^2 + b(3) + c = 11; 9a + 6b + c = 11 \text{ (tercera ecuación)}$$

Tenemos entonces un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas que son a , b y c :

$$a + b + c = 3; 4a + 2b + c = 6; 9a + 3b + c = 11$$

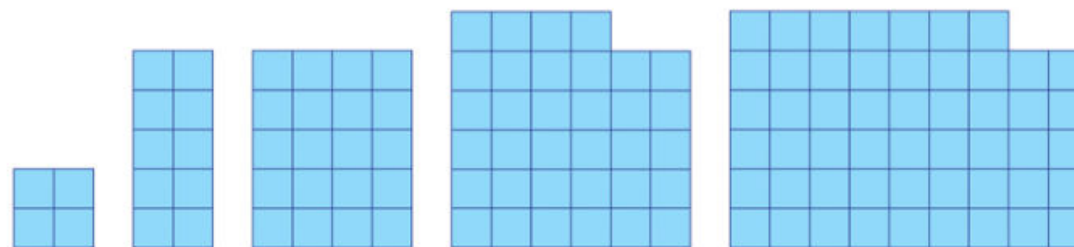
- Resuelve el sistema por el método que elijas.
 - ¿Cuánto valen a , b y c ? ¿Qué representan estos valores?
- ¿Cuál es la expresión que genera la sucesión?
 - ¿Puedes usarla para comprobar cuál es el cuarto término de la sucesión?
 - ¿Cuál es el décimo término de la sucesión?
 - ¿En qué posición de la sucesión el término es 49?

Compara tus respuestas con las de un compañero y corrijan sus errores.

La fórmula de las uvas. Caso 2

Lee la información y contesta en el cuaderno.

- Para el problema de las uvas utiliza el método de las diferencias de la página anterior y la información de tu tabla para responder las preguntas.
 - ¿Cuántas uvas hay en el primer término o racimo? ¿Cuál es el valor de x para ese término?
- Escribe la primera ecuación. Recuerda que debe ser de la forma: $ax^2 + bx + c = d$.
- Repite lo anterior para el segundo y tercer términos de la sucesión.
 - ¿Qué sistema de ecuaciones resultó? Resuélvelo.
 - ¿Cuál es la regla de la sucesión?
 - Usa la fórmula para encontrar la cantidad de uvas del quinto y décimo racimos.
 - ¿Podrías escribir la regla para la sucesión de otra manera?
 - ¿En qué racimo o término de la sucesión habrá 90 uvas?
 - ¿Cómo utilizas la información que tienes para responder esta pregunta?
- Observa la siguiente serie de cuadritos.



- Haz en el cuaderno una tabla para las primeras y segundas diferencias como hiciste en la situación problemática de los racimos de uvas.
- Ahora encuentra las ecuaciones que te permiten obtener el número de cuadritos que tiene cada término y completa la tabla.

Posición del término	1	2	3	4
Cuadritos	$a(1)^2 + b(1) + c = 4$ $a + b + c = 4$	$a(2)^2 + b(2) + c = 10$ $4a + 2b + c = 10$	$a(3)^2 + b(3) + c = 20$ $9a + 3b + c = 20$	$a(4)^2 + b(4) + c = 34$ $16a + 4b + c = \underline{\quad}$
Diferencia 1	$(4a + 2b + c) - (a + b + c) = 6$ $3a + b = 6$	$(9a + 3b + c) - (4a + 2b + c) = 10$ $5a + b = 10$		
Diferencia 2	$(5a + b) - (3a + b) = 4$ $2a = 4$			

- Observa los sistemas de ecuaciones de la tabla. Elige uno y resuélvelo para obtener la fórmula que genera la sucesión.
 - Encuentra la cantidad de cuadros que habrá en el octavo término.
 - Encuentra los términos con 50 y 100 cuadritos, si es que existen.

Comenta tus respuestas con la clase y aclara tus dudas con ayuda del profesor.

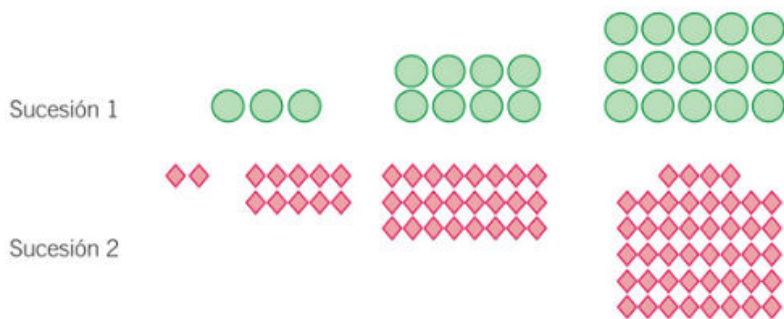
Tareas

Resuelve las actividades en el cuaderno.

1. Observa la siguiente sucesión.



- Encuentra la fórmula que la genera. Primero intenta encontrarla sin utilizar ninguno de los métodos anteriores.
 - Utiliza el método de diferencias, caso 1.
 - Utiliza el método de diferencias, caso 2.
 - Compara los tres resultados obtenidos. ¿Son iguales? Si no son iguales las fórmulas, ¿son equivalentes? Justifica tu respuesta.
 - ¿Las fórmulas que encontraste funcionan para todos los términos?
2. Para la sucesión generada por la fórmula $2n^2 - n + 3$, donde n representa el término de la sucesión, encuentra:
- El valor de los cuatro primeros términos.
 - El término cuyo número de elementos es 69.
3. Para las siguientes sucesiones encuentra:
- La fórmula o expresión que las genera.
 - El término, si es que existe alguno, cuyo valor es 35.
 - El término, si es que existe alguno, cuyo valor es 70.
 - Indica qué método utilizaste para encontrar las respuestas anteriores.



Revisa en clase tu tarea. Corrige tus errores y resuelve tus dudas con ayuda del profesor.

¿Cómo vamos?

Terminen su proyecto y preparen su presentación.

- Encuentren la fórmula que la origina y contesten preguntas sobre elementos de esta. El trabajo que desarrollaron es distinto, tienen otra información y encontraron otros datos. ¿Por qué? ¿Cuál es la diferencia?

© SANTILLANA

Distintos métodos a utilizar

Analiza con un compañero la información y respondan en su cuaderno.

Para encontrar la fórmula cuadrática que genera una sucesión, se puede utilizar cualquiera de los dos métodos de diferencias estudiados en las páginas 172 y 173. La diferencia entre uno y otro es que en la primera variación del método se utilizan los valores de tres términos para formar un sistema de ecuaciones, mientras que en el segundo, se generan las tres ecuaciones a partir del primer término y de las diferencias relacionadas con ese primer término (la ecuación que representa su valor, la que representa la primera diferencia y la que representa la segunda diferencia).

En ocasiones, la regla que genera la sucesión es fácil de identificar: hay que observar cómo cambia el valor de un término a otro. Puede buscarse pensando solamente en la relación que hay entre los términos de la sucesión.

- Analicen los primeros términos de la sucesión llamada números triangulares. Si se suman dos números triangulares iguales, se obtiene un número figurativo llamado oblongo, como se muestra.
 - ¿Cuál es la expresión algebraica para los números triangulares?
 - ¿Cuál es la expresión algebraica para los números oblongos?
- Utilicen el método de las diferencias, caso 2, para resolver de nuevo el problema de los números triangulares.
- Expliquen cada paso que realicen y comprueben que sus resultados en ambos métodos sean los mismos.

Primeros seis números
 $T_1 = 1$ $T_2 = 3$ $T_3 = 6$

$T_4 = 10$ $T_5 = 15$ $T_6 = 21$

Primeros tres números oblongos

Comenten en grupo la información que leyeron y sus resultados, y juntos lleguen a conclusiones sobre lo visto en esta secuencia didáctica.

Presentación de nuestro trabajo

Entreguen al profesor el informe y la maqueta que elaboraron con los datos acerca de la sucesión que trabajaron.

- Cada equipo presentará su maqueta con los cuatro primeros términos de la sucesión, y los demás equipos deberán encontrar su fórmula.
- En grupo, verifiquen que las fórmulas encontradas apliquen para todos los términos de la sucesión.

Registren en sus cuadernos las sucesiones de todos los equipos para complementar sus conclusiones sobre el tema.

¿Cómo nos fue?

- Al momento de desarrollar el proyecto, ¿qué parte fue la que te pareció más complicada? Explica tu respuesta.
- Explica la diferencia entre el caso uno y el caso dos para encontrar fórmulas cuadráticas que generen sucesiones.
- En la vida cotidiana, ¿qué aplicaciones has observado de este tipo de sucesiones?

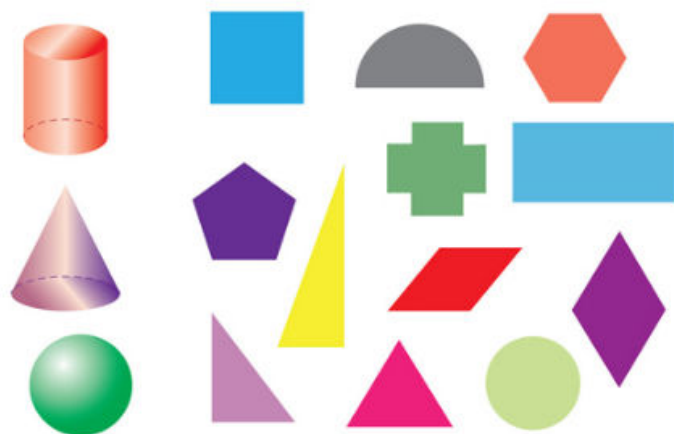
© SANTILLANA

Contenido

Análisis de las características de los cuerpos que se generan al girar sobre un eje, un triángulo rectángulo, un semicírculo y un rectángulo. Construcción de desarrollos planos de conos y cilindros rectos.

Rotación de figuras

Observa las siguientes figuras y cuerpos geométricos, analiza lo que se pide y responde en el cuaderno. Justifica tus respuestas.



- Imagina que colocas un eje de rotación en las figuras, donde tú prefieras, y las rotas. ¿Podrás generar cilindros, conos y esferas? ¿Con cuáles sí y con cuáles no?
- Une con líneas de diferentes colores las figuras planas que crees que generen el cilindro, el cono y la esfera, respectivamente.

Compara tus respuestas con las de otros compañeros. Si tienes dudas, coméntalas con tu profesor.

A continuación se describe en qué consiste el proyecto que trabajarán durante esta secuencia, la forma de trabajo y los materiales que necesitarán.

Nuestro trabajo

Reúnete con dos compañeros. Para este proyecto, construirán una **escultura** a partir de diferentes conos con determinados valores del radio, altura y generatriz.

- Más adelante se indicarán las medidas de los conos para que construyan sus desarrollos planos.
- Al final, presentarán su escultura y explicarán al grupo el procedimiento que siguieron para construirla.

© SANTILLANA

Dando vueltas

Realiza las siguientes actividades y responde.

Ahora estudiarás cuerpos geométricos que se forman a partir de girar o trasladar ciertas figuras.

- Imagina que un punto gira alrededor de otro punto que se encuentra fijo, manteniendo siempre la misma distancia que los separa.
 - ¿Qué figura se formaría? _____

Quizá, como es lógico, pienses que la respuesta es "una circunferencia". Piénsalo nuevamente antes de seguir leyendo.

Una circunferencia se produciría si limitáramos a un plano el movimiento del punto que gira alrededor del punto fijo. Por ejemplo, si lo estuviéramos dibujando sobre una hoja de papel, el resultado sí sería una circunferencia.

- Imagina ahora ese punto moviéndose en el espacio, es decir, en tres dimensiones.
 - ¿Qué se formaría? _____
 - ¿Qué diferencia habría si el punto que se mueve puede hacerlo con mucha más libertad, aunque sin rebasar una distancia máxima que lo separe del punto fijo? ¿Qué resultaría en este caso? _____
 - ¿En qué se parece este cuerpo al que obtuviste anteriormente y en qué es diferente? _____

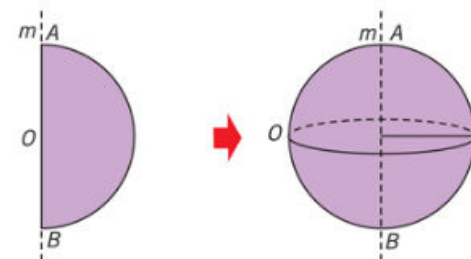
Compara tus respuestas con las de un compañero y escribe tus conclusiones.

En la actividad anterior reflexionaste acerca de cómo se genera una esfera.

- ¿Crees que haya otras maneras de generar una esfera por medio de un movimiento de rotación o de un giro? Menciona un ejemplo. _____

Observa el diagrama de la derecha y responde.

- Imagina que giras el arco AB alrededor del eje m . ¿Qué se genera? _____
- Ahora imagina que haces girar el semicírculo completo alrededor del eje m . ¿Qué se genera? _____

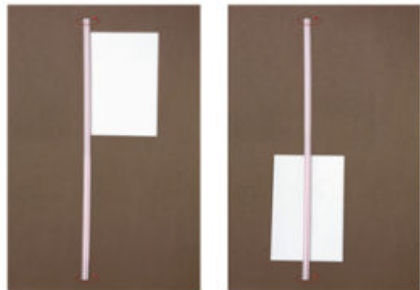


© SANTILLANA

En este caso, a la recta que contiene el diámetro AB se le llama **eje de rotación**.

Además de la esfera, hay otros cuerpos que se generan al rotar figuras. Veamos el caso siguiente.

- ¿Qué cuerpo se genera si giras un rectángulo alrededor de un eje de rotación paralelo a uno de sus lados? _____
- ¿Serían diferentes los resultados si el eje de rotación se colocara en medio del rectángulo que si se colocara para que coincidiera con uno de sus lados? ¿De qué manera? _____



• Con popotes y tarjetas rectangulares, construye los dispositivos que se muestran en las imágenes de la izquierda. Gira rápidamente el popote en cada caso.

- ¿Qué apreciaste? _____

- ¿Qué cuerpo se genera cuando el eje de rotación está "fuera" del rectángulo y paralelo a uno de sus lados? _____
- ¿En qué difiere con el cuerpo que se genera cuando el eje de rotación pasa por la mitad del rectángulo? _____

Compara tus respuestas con un compañero.

En la actividad anterior pudiste ver cómo se genera el cuerpo denominado **cilindro**. Veamos ahora qué ocurre al girar un triángulo rectángulo alrededor de un eje de rotación.



• ¿Qué cuerpo geométrico resultará de esta rotación? ¿Por qué? _____

• Construye un dispositivo como el de la imagen de la izquierda. Utiliza un popote y una tarjeta en forma de triángulo rectángulo y comprueba tu respuesta anterior.

• ¿Qué cuerpo se genera al girar el popote? _____

Compartan en grupo sus resultados y, con ayuda del profesor, lleguen a conclusiones.

© SANTILLANA

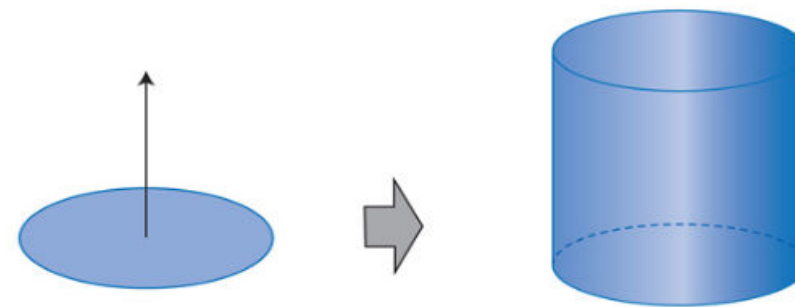
En la actividad de la página anterior pudiste ver cómo se forma el cono. La hipotenusa de este triángulo rectángulo recibe el nombre de **generatriz**, debido a que es la que "genera" el cono. En el caso del **cilindro**, la **generatriz** es el lado del rectángulo que da origen al cuerpo.

Espacio tecnológico

En el siguiente sitio encontrarás una animación y más información sobre los sólidos de revolución. recursostic.educacion.es/descartes/web/materiales_didacticos/Cuerpos_d3/redondos.htm (consulta: 23 de enero de 2017, 11:16 horas).

En las actividades anteriores viste qué figuras generan la **esfera**, el **cilindro** y el **cono**. Estos cuerpos se conocen como **sólidos de revolución**, ya que se originan al girar una figura plana alrededor de un eje de rotación.

El cilindro es un caso particular, pues también se puede generar al hacer un movimiento de traslación de un círculo a lo largo de una recta perpendicular a la base, como se aprecia a continuación.



Desarrollos planos de cilindros

Lee la situación y responde.

Las latas de refresco tienen forma casi cilíndrica, para elaborarlas se deben trazar sus respectivos desarrollos planos en grandes hojas de aluminio. ¿Cómo es el desarrollo plano de un cilindro? Veamos un poco más al respecto.

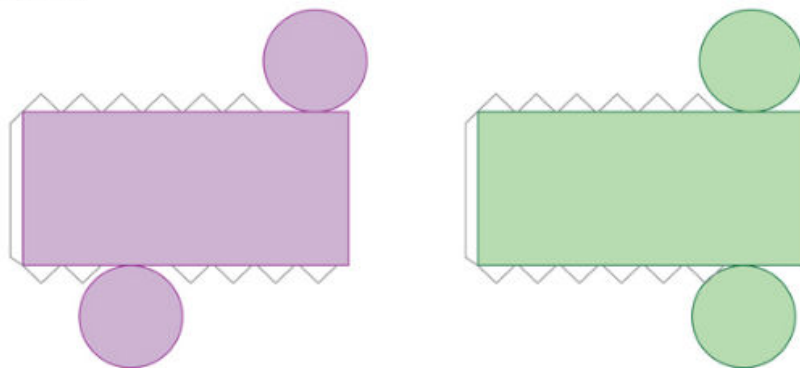
- Observa las latas y considera qué figuras geométricas se obtienen si recortas las dos bases circulares del cilindro y desdoblas lo demás. _____
- ¿Son las únicas figuras que se pueden obtener? ¿Cuáles serían las condiciones de las magnitudes del cilindro para que se obtuviera otra figura? _____

Compara tus respuestas con las de otro compañero, justifíquenlas y juntos lleguen a conclusiones.



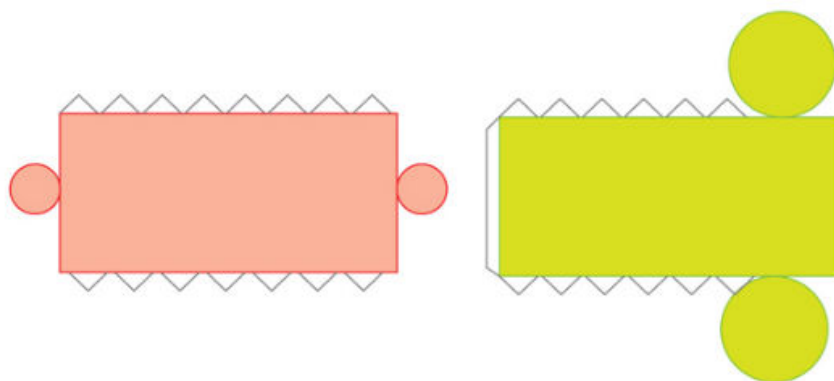
© SANTILLANA

Reúnete con tu equipo, observen los siguientes desarrollos planos y contesten las preguntas.



- ¿En qué son iguales y en qué son diferentes? _____
- Al armar los desarrollos planos, ¿se obtendrá el mismo cuerpo geométrico? ¿Por qué? _____
- ¿Qué relación existe entre la circunferencia de cada uno de los círculos y las dimensiones del rectángulo? _____

Ahora observen los siguientes desarrollos planos y respondan en el cuaderno.



- ¿En qué son iguales y en qué son diferentes?
- Al armar los desarrollos planos, ¿se obtiene el mismo cuerpo geométrico?
- Comparen la superficie lateral de ambas figuras, ¿son iguales?
- Comparen la superficie total de ambas figuras, ¿son iguales?
- Copien en hojas de papel o cartulina los desarrollos anteriores, recórtelos e intenten formar cilindros.

Comenten con otro equipo sus respuestas y escriban sus conclusiones en el cuaderno.

© SANTILLANA

Como pudieron ver en la actividad de la página anterior, el desarrollo plano de un cilindro está constituido por dos bases circulares y un rectángulo. La longitud de un lado del rectángulo es igual a la longitud de las circunferencias (**bases del cilindro**). La altura del cilindro corresponde al lado (**generatriz**) del rectángulo que da origen al cuerpo.

¿Cómo vamos?

En la siguiente sección de esta secuencia descubrirán cómo construir los desarrollos planos de un cono. Analicen con cuidado la relación que existe entre la longitud del radio, la altura del cono y la generatriz, ya que a continuación solamente se indican dos de los tres valores y ustedes tendrán que calcular el que falta.

- Construyan conos con las siguientes medidas:
 - a) radio = 6 cm, altura = 8 cm
 - b) radio = 5 cm generatriz = 13 cm
 - c) altura = 3 cm, generatriz = 5 cm
 - d) radio = 3 cm, altura = 6 cm
 - e) radio = 8 cm, generatriz = 17 cm
 - f) altura = 4 cm, generatriz = 8.5 cm
- Diseñen la escultura que van a construir.

Desarrollo plano del cono

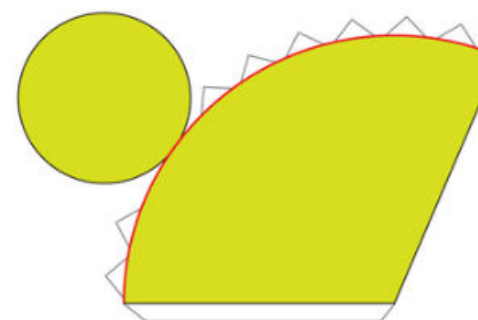
Realicen la actividad en equipos.

Veamos ahora el desarrollo plano de un cono.

- Consigan un cono de papel y háganle un corte a lo largo de su generatriz (en la figura se indica en amarillo).
- Dibujen su desarrollo plano en el cuaderno. Consideren que el cono tiene base y tracen el círculo correspondiente. ¿Cómo está formado? _____



Seguramente su desarrollo fue similar al siguiente; obsérvenlo con cuidado.



- ¿Qué relación existe entre la circunferencia de la base y la longitud del arco del sector circular (indicado en rojo)? _____
- En este mismo desarrollo plano, ¿dónde está indicada la generatriz del cono? _____
- ¿A qué parte del sector circular corresponde la generatriz? _____

© SANTILLANA

Como pudieron ver en la página anterior, el **desarrollo plano de un cono está conformado por un círculo y un sector circular**; en este último, la longitud del arco es igual a la longitud de la circunferencia de la base y el radio es la generatriz del cono.

- ¿Qué medidas necesitarán para trazar el desarrollo plano de un cono?

Si conocen el radio del círculo que forma la base y el radio del sector circular, ¿tendrían elementos suficientes para trazar el desarrollo plano de un cono?
¿Por qué? _____

- En el curso pasado estudiaron cómo calcular la longitud del arco de un sector circular. Si ahora conocen el radio y la longitud del arco del sector circular, ¿pueden determinar la medida del ángulo? ¿Cómo lo harían? _____

Recuerden cómo calcular el área de un sector circular. ¿Qué datos necesitan para ello? _____

¿Qué representa el área del sector circular en el cono?
Al volver a unir este desarrollo plano para formar un cono, ¿en qué se convertirá la superficie del sector circular?

Comenten en grupo sus respuestas. Si tienen dudas, pidan ayuda al profesor.

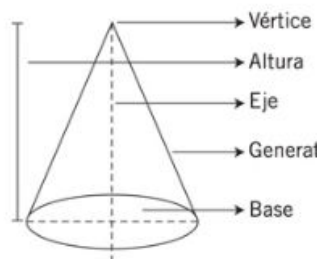
¿Cómo vamos?

Reúnanse con su equipo y trabajen en su proyecto.

- Tracen en papel de colores los desarrollos planos de los conos que utilizarán y construyan su escultura.
- Preparen su presentación.

Aplicación de un teorema famoso

Veamos ahora los elementos del cono. Continúen trabajando en equipos. Observen la figura y contesten en el cuaderno.



- ¿Qué relación existe entre los distintos elementos del cono?
- Pongan atención al radio, a la altura y a la generatriz. ¿Qué figura geométrica forman?

© SANTILLANA

- ¿Recuerdan el teorema que relaciona los catetos y la hipotenusa de un triángulo rectángulo? Observen de nuevo la figura de la página anterior.
 - Si conocemos la longitud del radio de la base y la longitud de la generatriz, ¿cómo podemos determinar la altura del cono, es decir, la distancia del centro de la base al vértice o punto más alto del cono?
 - Y si conocemos la longitud del radio y la altura del cono, ¿podemos calcular con base en ellos la generatriz?

Comenten sus respuestas en grupo. Si tienen dudas pidan ayuda al profesor.

Tareas

Haz las actividades en el cuaderno.

1. ¿Qué cuerpo se genera si giras un triángulo equilátero de manera que el eje de rotación coincida con una altura del triángulo?
2. ¿Qué cuerpo se genera si giras un triángulo rectángulo de manera que el eje de rotación coincida con la hipotenusa del triángulo?
3. Traza el desarrollo plano de un cilindro que tenga una altura de 6 cm y cuya base tenga un diámetro de 4 cm.
4. Traza el desarrollo plano de un cono que tenga una altura de 6 cm y cuya base tenga un diámetro de 4 cm.

Revisa con el grupo tus respuestas y, con ayuda del profesor, llega a conclusiones.

Presentación de nuestro trabajo

Presenten al grupo su escultura. Elijan uno de los conos que construyeron y expliquen a sus compañeros cómo lo hicieron. Escriban en el pizarrón el procedimiento que utilizaron para calcular las medidas faltantes.

- ¿Cómo calcularon la circunferencia de la base circular?
- Con base en la longitud del arco del sector circular, ¿cómo calcularon la medida del ángulo del sector circular?
- ¿Los resultados de los equipos son diferentes? ¿Sus procedimientos fueron los mismos?
- Hagan una exposición de todas las esculturas en algún lugar de la escuela en el que las puedan apreciar sus compañeros de otros grupos.

¿Cómo nos fue?

- En la actividad inicial, ¿pudiste determinar con cuáles figuras se forman cilindros, esferas y conos al rotarlas sobre un eje?
- ¿Por qué es importante la posición del eje de rotación con respecto a la figura? ¿Qué diferencias se generan al colocar el eje de rotación en otra posición?
- ¿Qué relación existe entre la circunferencia de la base de un cilindro y la longitud de la base del rectángulo que forma parte de su desarrollo plano?
- ¿Qué relación existe entre el radio de la base, la altura y la generatriz de un cono?
- ¿Qué aprendizaje lograste al hacer la escultura?

© SANTILLANA

Contenido

Análisis de las relaciones entre el valor de la pendiente de una recta, el valor del ángulo que se forma con la abscisa y el cociente del cateto opuesto sobre el cateto adyacente.

La pendiente de una escalera

Lee la situación y responde en el cuaderno.



Un arquitecto quiere construir una escalera de la planta baja al primer piso de una casa. La distancia vertical entre ambos pisos es de 2.40 metros. Para cumplir con la normatividad establecida por las autoridades mexicanas, la **huella** debe medir por lo menos 25 cm, y el **peralte** o **contrahuella** debe medir como máximo 23 cm. Como cuenta con suficiente espacio, el arquitecto quiere que la escalera sea bastante cómoda y segura.

- ¿Cuántos escalones tendrá su escalera?
- ¿Cuáles deben ser las medidas de la huella y del peralte?
- ¿Qué relación deben tener la huella y peralte para que la escalera se pueda subir cómodamente? ¿Existe más de una respuesta?
- Mide las longitudes de la huella y peralte de la escalera de tu casa o de tu escuela. ¿Coinciden las medidas?

Compara tus respuestas con las de tus compañeros. Concluyan en grupo las ventajas y desventajas de los diferentes diseños propuestos.

A continuación se describe en qué consiste el proyecto que trabajarán durante esta secuencia, la forma de trabajo y los materiales que necesitarán.

Nuestro trabajo

En pareja, elaborarán un **cartel** donde mostrarán diferentes triángulos rectángulos en los que se indiquen las medidas de sus ángulos y de sus respectivos catetos.

Al colocar uno de los catetos como base, calcularán el cociente que se forma entre la longitud del cateto vertical y la longitud del cateto horizontal, y explicarán la relación que tiene ese cociente con la medida del ángulo de inclinación de la hipotenusa con respecto de la base o cateto horizontal.

- En su cartel deberán incluir: dos triángulos semejantes, un triángulo rectángulo isósceles, un triángulo cuyo cociente de catetos sea mayor a uno y otro en donde sea menor a uno.
- A lo largo de la secuencia se darán instrucciones para construir y medir otros triángulos para resolver diferentes problemas. Agréguelos al cartel. Al final, presentarán sus resultados al grupo.

La pendiente de una escalera

Lee lo siguiente y contesta de manera individual.

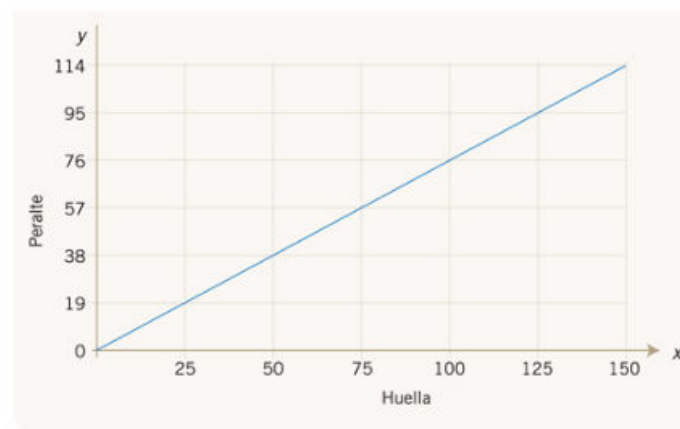
En secuencias anteriores has aprendido que la pendiente de una recta tiene que ver con su inclinación. Al resolver el problema inicial, habrás observado que no existe una inclinación definitiva para todas las escaleras sino que cada una puede tener diferente pendiente, dependiendo de la relación que existe entre la longitud del peralte y la longitud de la huella.

La **pendiente de una recta** es el cociente que resulta de dividir el incremento de las ordenadas (y), entre el incremento de las abscisas (x):

$$\text{Pendiente de una recta} = \frac{\text{incremento en } y}{\text{incremento en } x}$$

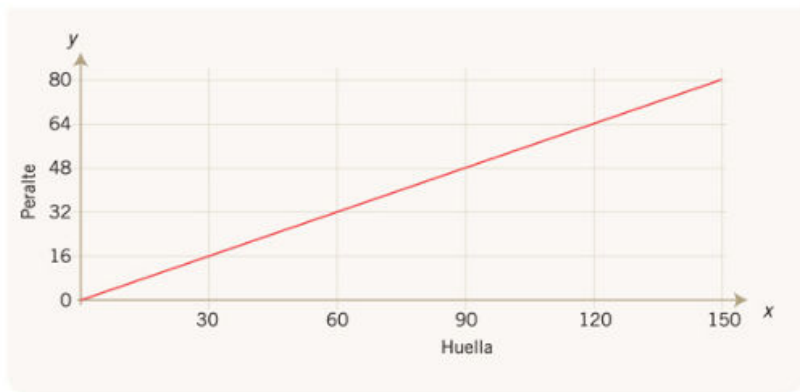
- Si el peralte de una escalera mide 19 cm con una huella de 25 cm, y otra escalera mide 16 cm en su peralte y 30 cm en su huella, ¿cuál de las dos tiene mayor pendiente y mayor ángulo de inclinación?

La siguiente gráfica muestra la relación entre el peralte y la huella de los primeros seis escalones de la primera escalera:



- Por cada 25 unidades que se incrementa x , ¿cuántas unidades se incrementa y ? _____
- Calcula la pendiente de la recta que pasa por los puntos (0, 0) y (25, 19). _____
- Si se suben dos escalones a la vez, ¿cuánto medirá el incremento en y y cuánto en x ? _____
- Calcula la pendiente de la recta que pasa por los puntos (25, 19) y (75, 57). _____
- ¿Y si se subieran los siguientes tres escalones juntos, cuánto medirá el incremento en y y en x ? Calcula la pendiente de la recta que pasa por (75, 57) y (150, 114). _____
- ¿Cambió el valor de la pendiente de la recta? _____

- Por cada unidad que aumenta x , ¿cuánto aumenta y ? Escribe tu respuesta en forma de fracción y de número decimal. _____
- Traza en una hoja un triángulo rectángulo cuyo cateto horizontal mida 25 cm y cuyo cateto vertical mida 19 cm. ¿Cuánto mide el ángulo que forma el cateto horizontal con la hipotenusa? _____
- Ahora observa la gráfica que corresponde a la segunda escalera.



- ¿Cuánto aumenta el peralte por cada 30 cm que aumenta la huella? _____
- Calcula la pendiente de la recta que pasa por los puntos (30, 16) y (150, 80). _____
- ¿Cuánto aumenta el peralte por cada centímetro que aumenta la huella? Escribe tu respuesta en forma de fracción y decimal. _____
- ¿Cómo es la pendiente de esta recta respecto de la pendiente de la recta, o escalera anterior? ¿Cuál es mayor? _____
- Traza en una hoja un triángulo rectángulo cuyo cateto horizontal mida 30 cm y cuyo cateto vertical mida 16 cm. Mide el ángulo que forma el cateto horizontal con la hipotenusa y compáralo con el ángulo de inclinación de la escalera anterior.
 - ¿Cuál será el valor de la pendiente de una escalera que tiene un peralte de 23 cm y una huella del mismo valor? _____
 - ¿Cómo es el valor de esta pendiente respecto de las pendientes de las escaleras analizadas previamente? _____
 - ¿Cuánto medirá su ángulo de inclinación? _____
 - ¿Cómo es este ángulo respecto del ángulo de inclinación de las escaleras analizadas previamente? ¿Cuál es mayor? _____

- ¿Cuánto miden los ángulos de inclinación de las rectas cuya pendiente es mayor que 1? _____
- ¿Cuánto miden los ángulos de inclinación de las rectas cuya pendiente es menor que 1? _____

Compara tus respuestas con las de tus compañeros y coméntalas con el profesor. Resuelvan juntos las dudas.

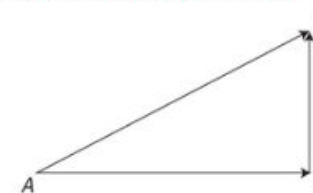
El signo de la pendiente de una recta

En pareja, resuelvan las actividades.

Observen que para llegar del punto A al punto B , podemos hacer dos movimientos, uno horizontal AC , seguido de uno vertical CB .

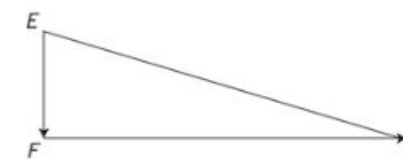
Para calcular la pendiente de una recta es importante tomar en cuenta el sentido de cada movimiento, de acuerdo con el signo que corresponde a cada flecha, tal como se señala a continuación:

$$\text{Pendiente} = \frac{\begin{array}{c} \uparrow \\ + \\ \downarrow \\ - \end{array}}{\begin{array}{c} \rightarrow \\ + \\ \leftarrow \\ - \end{array}}$$



En este caso, tanto AC como CB son positivos.

- ¿Qué signo tendrá la pendiente de la recta AB si calculamos el cociente de CB y AC incluyendo sus signos correspondientes? _____
- Si en vez de movernos de A a B , nos movemos de B a A , ¿cambia el signo de la pendiente de la recta que pasa por los puntos A y B ? ¿Por qué? _____
 - ¿Qué signo tendría BC ? _____
 - ¿Qué signo tendría CA ? _____
 - ¿Qué signo tendría el cociente? _____
- Analicen ahora la pendiente de la recta ED .
 - ¿Qué signo tiene el movimiento EF ? _____
 - ¿Qué signo tiene el movimiento FD ? _____
 - ¿Qué signo tiene la pendiente de la recta ED ? _____
 - ¿Qué sucede si nos movemos del punto D al punto E ? _____
 - ¿Qué signo corresponde al movimiento DF ? _____
 - ¿Qué signo corresponde al signo FE ? _____
 - Entonces, ¿qué signo tiene la pendiente de la recta que pasa por los puntos D y E ? _____



Comparen sus respuestas con las de sus compañeros y coméntenlas con el profesor.

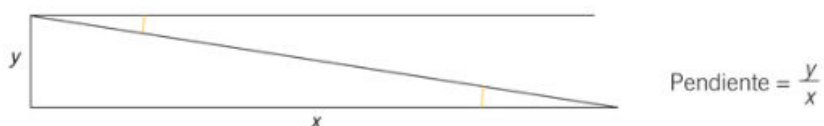
El ángulo de descenso de un avión

Resuelve de manera individual.

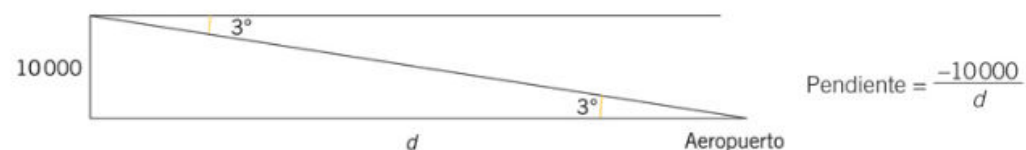


El piloto de un avión que vuela a una altitud de 10 000 metros sobre el nivel del mar, viajando de Acapulco a la Ciudad de México, debe iniciar su descenso, tomando en cuenta que para lograr un aterrizaje perfecto, el ángulo de descenso del avión normalmente es de 3° . ¿A qué distancia horizontal del aeropuerto debería iniciar su descenso? Realiza el siguiente procedimiento para encontrar la respuesta.

- Traza un triángulo donde el ángulo que se forma entre el cateto horizontal y la hipotenusa mida 3° . No importa qué medidas tengan los lados de tu triángulo.
- Mide ambos catetos y encuentra el valor de la pendiente de la recta que representa la trayectoria de descenso del avión.



- Explica por qué la pendiente resulta negativa. _____
- Compara el valor de la pendiente de la hipotenusa que trazaste con la que calcularon tus compañeros en sus triángulos. ¿Son iguales o casi iguales? ¿A qué se deben las discrepancias? _____
- Calcula el promedio de las pendientes encontradas en el grupo. _____
 - Considera el valor anterior como inicio del descenso del avión. ¿Cómo es la pendiente de la hipotenusa del triángulo que trazaste respecto de la pendiente de la trayectoria que tendrá el avión en su descenso? _____
- Analiza la figura.



- Toma en cuenta que ambas pendientes deben ser iguales, despeja d y encuentra su valor. _____

© SANTILLANA

- Explica por qué fue suficiente que todos los triángulos trazados en el grupo fueran semejantes, aunque no tuvieran las mismas medidas, para resolver el problema.
- Considera que el avión va en línea recta e investiga cuál es la distancia entre Acapulco y la Ciudad de México. Consigan un mapa y localicen aproximadamente, ¿sobre cuál ciudad estaría volando el avión al iniciar el descenso hacia la Ciudad de México? _____
- Explica por qué en un vuelo comercial de Acapulco a la Ciudad de México, el avión tarda aproximadamente lo mismo en llegar a su altitud de crucero (altitud máxima) que lo que tarda en aterrizar. Observa de nuevo el diagrama de la página anterior. _____

Comenta tus respuestas en grupo. Si tienes dudas, pide ayuda al profesor.

Tareas

Resuelve las situaciones en el cuaderno.

1. La pendiente de una carretera no debe ser mayor a $10\% = \frac{1}{10} = 0.1$ para que los vehículos la puedan transitar a una velocidad que no impida el flujo vehicular, si es subida; o que no esté demasiado empinada, si es bajada. Construye un triángulo que tenga esa pendiente y mide su ángulo de inclinación con un transportador.
2. Una montaña rusa tiene una bajada con un ángulo de inclinación de 76° . Construye un triángulo con ese ángulo, mide los catetos y calcula su pendiente. ¿Cómo sería una montaña rusa con una bajada con ángulo de inclinación de 90° ?
3. En Montreal, Canadá, los techos de las casas deben tener una pendiente mínima de $\frac{1}{2}$ para evitar que la nieve se acumule y el peso de esta los dañe. Construye un triángulo con esa pendiente y mide el ángulo de inclinación del techo.
4. En España, el Código Técnico de la Edificación indica que la huella (H) y el peralte (P) de una escalera deben cumplir la siguiente relación: $54 \text{ cm} \leq 2P + H \leq 70 \text{ cm}$. Traza tres triángulos que cumplan con esta relación.



En la ingeniería, como en los otros campos del conocimiento, la aplicación de las matemáticas es fundamental para hacer los cálculos.



En algunas partes del mundo, la inclinación que deben tener los techos de las casas depende de la cantidad de nieve que cae sobre estos cada invierno. Conviene que la nieve resbale y no se acumule en los techos, ya que su peso puede causar daños severos.

Compara tus respuestas con el grupo y corrige los errores que hayan surgido.

© SANTILLANA

En la siguiente página de Internet encontrarás una aplicación que te permitirá variar el ángulo de inclinación de una carretera y analizar la relación que tiene este concepto con la pendiente. Encuentra la pendiente calculando el cociente de b y c . recursos.tic.educacion.es/gauss/web/materiales_didacticos/eso/actividades/geometria/trigonometria/pendiente_carretera/actividad.html (consulta: 14 de noviembre de 2013)

¿Cómo vamos?

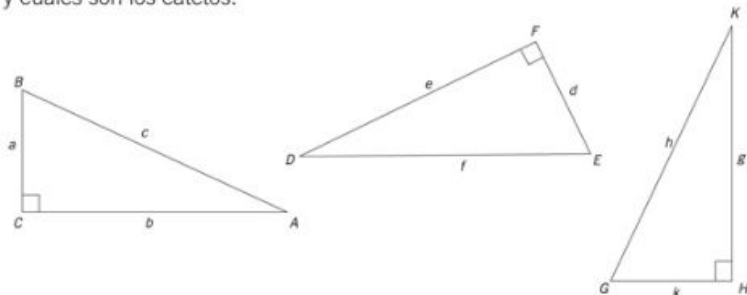
Reúnete con tu pareja y hagan lo que se indica.

- A lo largo de la secuencia han construido diferentes triángulos para resolver los problemas. Inclúyanlos como parte de su presentación al grupo.
- Es importante que puedan explicar por qué la pendiente se puede expresar como fracción, decimal o porcentaje. Aclaren las dudas que tengan.
- Es importante tomar en cuenta el signo que tiene la pendiente de una recta, dependiendo si es ascendente (creciente) o descendente (decreciente), cuando esta se traza de izquierda a derecha. Consideren las actividades que han resuelto y ejemplifiquen con sus triángulos las variaciones en los signos de las pendientes que forman las hipotenusas.

Cateto opuesto y cateto adyacente

En pareja, resuelvan la actividad.

- Escriban en los siguientes triángulos rectángulos cuál de los lados es la hipotenusa y cuáles son los catetos.



Observen que cada uno de los ángulos agudos que contienen estos triángulos está formado por un cateto y la hipotenusa. El cateto que forma el ángulo agudo junto con la hipotenusa, se denomina **cateto adyacente** a ese ángulo. El otro cateto es el **cateto opuesto** a ese ángulo.

Por ejemplo, en el tercer triángulo, el cateto k es adyacente al ángulo G . El cateto opuesto al ángulo G es g .

- Normalmente se denomina con literales minúsculas a los lados y con mayúsculas a los ángulos. Analicen los triángulos anteriores.
 - ¿Qué literal corresponde al cateto adyacente al ángulo A ? _____
 - ¿Qué literal corresponde al cateto opuesto al ángulo B ? _____

- ¿Puede un cateto ser opuesto a un ángulo y al mismo tiempo ser el adyacente de otro ángulo? ¿Por qué? _____
- ¿Qué literal corresponde a la hipotenusa del triángulo DEF ? _____
- ¿Qué literal corresponde al cateto opuesto al ángulo E ? _____
- ¿Qué literal corresponde al cateto adyacente al ángulo E ? _____
- Expliquen por qué la pendiente de la recta h es el cociente del cateto opuesto sobre el cateto adyacente al ángulo G . _____
- ¿Cómo pueden expresar la pendiente de la recta c mediante el cociente de dos literales? _____
- Expliquen cómo fueron acomodadas las literales mayúsculas y sus correspondientes minúsculas en cada uno de los triángulos. _____

Comparen sus respuestas con las de otros compañeros y registren sus conclusiones.

Presentación de nuestro trabajo

Presenten al grupo su cartel.

- Expliquen por qué no hubiera sido posible resolver los problemas de la secuencia sin antes trazar los triángulos y medir la longitud de sus lados y sus ángulos.
- ¿Cómo son sus resultados comparados con los de otros compañeros que trazaron triángulos semejantes?
- Comenten por qué la pendiente de una recta que tiene un ángulo de inclinación dado en un problema no cambia si los triángulos trazados son de diferente tamaño.
- ¿Qué ventaja tendría construir una tabla con las pendientes que corresponden a diferentes ángulos de inclinación?

¿Cómo nos fue?

- Escribe en tu cuaderno qué es la pendiente de una recta. Explica la relación que tiene la pendiente con el ángulo de inclinación de una recta y cómo un segmento de la recta inclinada puede dibujarse como la hipotenusa de un triángulo rectángulo.
- Explica por qué la pendiente de una recta se puede encontrar como el cociente del cateto opuesto sobre el cateto adyacente al ángulo de inclinación de la recta.
- Menciona algunas de las aplicaciones de conocer la pendiente y el ángulo de inclinación de una recta.

Contenido

Análisis de las relaciones entre los ángulos agudos y los cocientes entre los lados de un triángulo rectángulo.

La altura de El Ángel

Lee la siguiente información y contesta en el cuaderno.



Columna de la Independencia en 1910.



Columna de la Independencia en 2010.

La Columna de la Independencia de la Ciudad de México o El Ángel, como se conoce popularmente, fue inaugurado el 16 de septiembre de 1910, para celebrar el centenario de la Independencia de nuestro país.

Como puedes observar en las dos fotografías, la altura de la Columna ha “aumentado”. ¿Cómo sucedió esto? En realidad, no es que el monumento haya crecido. La Columna fue construida a nivel del suelo, sobre una cimentación que la ha mantenido a la misma altura respecto del nivel del mar, pero el hundimiento permanente de la ciudad ha provocado que el monumento “sobresalga” de dicho nivel. Por eso y para poder acceder a su base, ha sido necesario añadirle escalones. De 1910 a la fecha se le han agregado diecisiete en total.

- ¿Cómo podemos saber la altura actual de la Columna de la Independencia?

Comenta tu respuesta con tus compañeros y con el profesor. Analiza las ventajas y desventajas de las diferentes estrategias propuestas.

A lo largo de las actividades regresarás a trabajar con este problema. Antes, reúnete con un compañero y lean en qué consiste el proyecto que realizarán durante esta secuencia y los materiales que necesitarán.

Nuestro trabajo

En este proyecto, junto con un compañero, construirás un **aparato** que les servirá para medir ángulos de elevación, y lo usarán para calcular distancias inaccesibles, por ejemplo, la altura de algún edificio o de un monumento representativo de la ciudad donde viven.

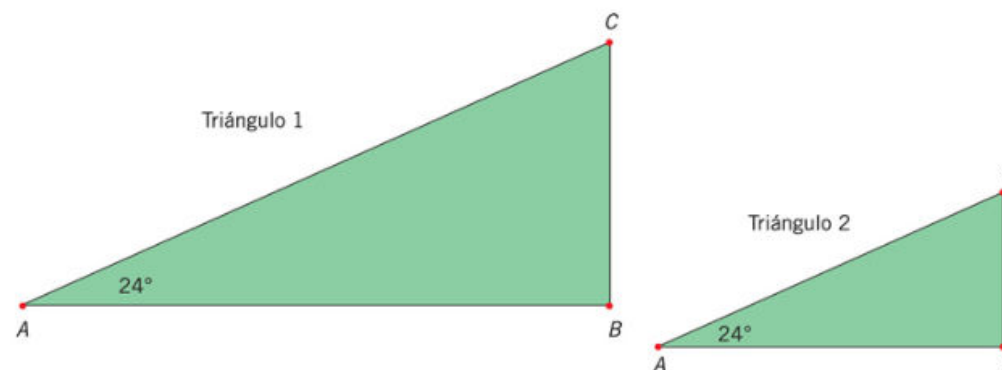
- Van a necesitar un transportador, un popote, hilo, cinta adhesiva y una pesa pequeña.

Al finalizar la secuencia entregarán un informe escrito y presentarán el aparato que construyeron.

Una relación singular

Lee y contesta.

Observa los siguientes triángulos rectángulos. Recuerda que el lado AB es el **cateto adyacente** al ángulo de 24° . El lado BC es el cateto opuesto al ángulo de 24° , y la **hipotenusa** es el lado del triángulo opuesto al ángulo de 90° .



- Mide los lados de cada triángulo y divide la longitud del cateto opuesto entre la longitud de la hipotenusa. Anota tus resultados.

- Triángulo 1: _____
- Triángulo 2: _____

Ahora realicen la siguiente actividad en equipos de seis integrantes.

- Con ayuda del profesor, asignen a cada equipo un ángulo agudo (por ejemplo, 24° , 28° , 32° , etc.).
- Una vez que tengan el ángulo agudo con el que trabajarán, cada integrante del equipo trazará en cartulina o en una hoja tamaño carta un triángulo rectángulo (como los de esta página). En cada equipo los triángulos serán de distinto tamaño, pero todos deberán tener el mismo ángulo de la base, que será el que se les asignó al principio.
- Anoten en cada triángulo las medidas de cada lado. Recuerden que un segmento se indica con dos letras, por ejemplo, segmento \overline{AB} , \overline{BC} , \overline{AC} , y un ángulo se indica con tres letras, por ejemplo $\angle ABC$, $\angle BAC$, $\angle ACB$, y la letra que queda en medio es la que corresponde al vértice del ángulo.
- Contesten lo siguiente de manera individual. Trabajen con el triángulo que trazaron.
 - Si se divide la longitud del cateto opuesto entre la longitud de la hipotenusa, ¿cuál es el resultado? _____
 - Si se divide la longitud del cateto adyacente entre la longitud de la hipotenusa, ¿cuál es el resultado? _____
 - Si se divide la longitud del cateto opuesto entre la longitud del cateto adyacente, ¿cuál es el resultado? _____

Comparen sus resultados con los de sus compañeros de equipo.

- ¿Qué observan? _____

Comenten sus resultados en grupo. Elaboren y completen una tabla como la siguiente en el cuaderno. Integren los resultados de todos los equipos.

Número de equipo	Ángulo asignado	Cateto opuesto/hipotenusa	Cateto adyacente/hipotenusa	Cateto opuesto/cateto adyacente
1	24			

- Analicen los resultados de la tabla. ¿Qué observan? _____
- ¿Cómo se les llama a las figuras que son de diferente tamaño, pero tienen ángulos correspondientes iguales? _____
- ¿Qué se conserva en todos los triángulos que comparten el mismo ángulo? _____
- ¿Por qué creen que no importa el tamaño del triángulo y solo importan las medidas de los ángulos? _____
- ¿Para qué pueden servir esos resultados? _____

Ahora, cada integrante del equipo trabajará un triángulo rectángulo con un ángulo diferente.

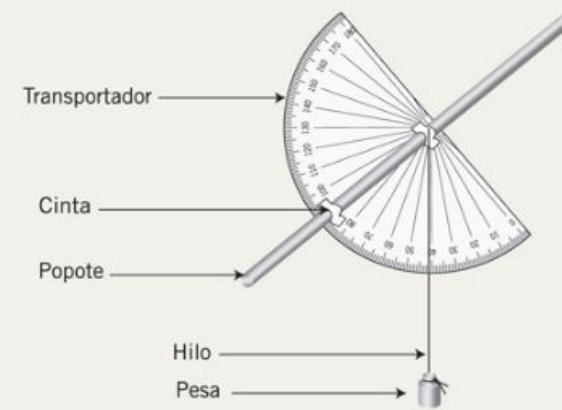
- Con ayuda del profesor, asignen a cada alumno la construcción de un triángulo rectángulo en el que el ángulo agudo de la base sea alguno de los que se indican en la siguiente tabla; de nuevo, pueden dar a los lados las medidas que quieran.
- Calculen los diferentes cocientes y completen la tabla.

Nombre del alumno	Ángulo	Cateto opuesto/hipotenusa	Cateto adyacente/hipotenusa	Cateto opuesto/cateto adyacente
	15°			
	18°			
	21°			
	24°			
	27°			
	30°			
	33°			
	36°			
	39°			
	42°			
	45°			

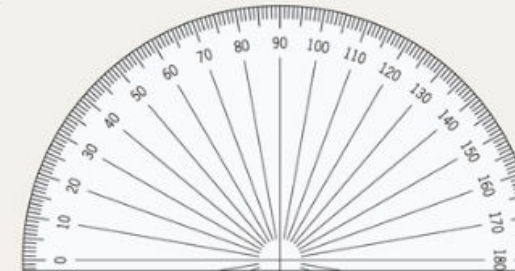
Comenten sus resultados en grupo. Más adelante los utilizarán.

¿Cómo vamos?

Reúnete con tu compañero de trabajo. Con un transportador, un popote, hilo, cinta adhesiva y una pesa, construyan un aparato como el de la siguiente figura.

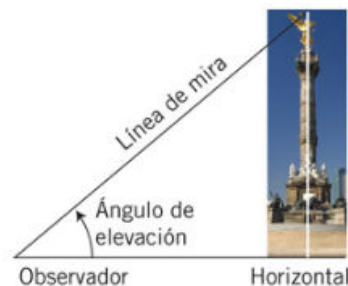


- Para que la marca que hace el hilo con el transportador les sea útil, enumeren los ángulos del transportador en el sentido que se indica en la siguiente figura.



- Elijan una construcción alta de la que quieran calcular la altura; puede ser un monumento, un edificio, una pirámide, el asta de una bandera, etc. Deben poder visitarlo, pues tendrán que hacer las observaciones y mediciones que se indican a continuación.
- Aléjense varios metros de la base de la construcción y ubíquense en un lugar seguro.
- Tomen el instrumento que construyeron y colóquenlo de tal forma que a través del orificio del popote puedan mirar el punto más alto de la construcción que eligieron.
- Observen el ángulo que marca el hilo con el transportador; ese ángulo es igual al **ángulo de elevación** entre la horizontal (la calle) y el punto más alto de la construcción. Anoten su resultado.
- Midan la **distancia horizontal** desde donde estén parados hasta la base del monumento o edificio. A veces será imposible medir la distancia completa, porque habrá obstáculos, así que traten de hacer una muy buena estimación. Anoten su resultado.
- Ubíquense a diferentes distancias (al menos cuatro más) y repitan el procedimiento de medición. ¿Qué le sucede al ángulo de elevación conforme se alejan? Anoten el resultado de la distancia horizontal y el ángulo encontrados en cada caso.

El Ángel de Independencia



Lee la siguiente situación y responde en el cuaderno.

Para su proyecto, Lucía y Ana eligieron calcular la altura de la Columna de la Independencia, así que tomaron las medidas y ahora analizan la relación entre ellas.

Lucía observó que entre la línea de mira, el piso y el monumento se formó un triángulo rectángulo y que ya conocen el **ángulo de elevación** y la **longitud del cateto adyacente** a este ángulo (es decir, la distancia horizontal).

- ¿Cómo puedes aprovechar estos datos para calcular la longitud del cateto opuesto al ángulo de elevación, es decir, la altura de la Columna?
- Observa la tabla que elaboraron en la actividad de la página 194 para los cocientes de diferentes ángulos. ¿Será útil para encontrar el cateto opuesto?
- Supón que Lucía y Ana encontraron que el ángulo de elevación al mirar hacia la construcción era de 36° . Verifica en la tabla los resultados obtenidos para dicho ángulo.

Ángulo	Cateto opuesto / hipotenusa	Cateto adyacente / hipotenusa	Cateto opuesto / cateto adyacente
36°	0.59	0.81	0.73

- Si podemos ver que el resultado de dividir el cateto opuesto (altura de la Columna) entre el cateto adyacente (la distancia horizontal que separa la base de la Columna) es 0.73 y ya se tiene la medida de esa distancia horizontal, ¿cómo se puede encontrar el valor del cateto opuesto, es decir, la altura de la Columna?
- Revisa el siguiente procedimiento y analízalo con tus compañeros.

$$0.73 = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}} = \frac{\text{altura desconocida}}{\text{distancia horizontal conocida}}$$

- ¿Qué procedimiento algebraico se debe hacer en esta ecuación para encontrar el valor de la altura desconocida?
- Calcula la altura de El Ángel si la distancia horizontal de la posición de Lucía y Ana a la base de la Columna es de 61.6 m.

Comenta tus respuestas con el grupo. Si tienes dudas, consulta al profesor.

¿Cómo vamos?

Reúnete con tu compañero y continúen con su proyecto.

- Calculen la altura de la construcción que eligieron con las medidas que obtuvieron la primera vez. Escriban sus resultados en una tabla como la siguiente.

Distancia horizontal (m)	Ángulo de elevación	Cateto opuesto / cateto adyacente	Altura
10			
20			
30			

© SANTILLANA

A lo lejos

Resuelve con un compañero la siguiente actividad.

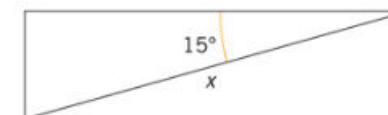
Imaginen que están en el mirador de un edificio que mide 230 metros de altura. Bajan su mirada un poco y forman un ángulo de depresión con respecto de la horizontal, como se muestra en la imagen. Si el ángulo mide 15° , ¿cuánto mide la distancia en diagonal que puedes ver hasta llegar al piso?



- Tracen en una hoja tamaño carta un triángulo rectángulo que tenga un ángulo de 15° . Procuren que sea suficientemente grande para que puedan medir con precisión cada uno de sus lados.
- Midan cada uno de los lados del triángulo.
- Calculen cada uno de los siguientes cocientes y completen la tabla:

Ángulo	Cateto opuesto / hipotenusa	Cateto adyacente / hipotenusa	Cateto opuesto / cateto adyacente
15°			

El triángulo que trazaron es semejante al triángulo que forman el edificio, el segmento horizontal, y el segmento que va en diagonal de sus ojos hasta topar con el piso.



- Anoten en el cateto opuesto al ángulo marcado la medida: 230 m.
- La longitud de la hipotenusa, indicada en la figura con la letra x , es la que quieres encontrar. ¿Cuál de los tres cocientes que calcularon y anotaron en la tabla anterior les conviene usar para calcular el valor de x ? ¿Por qué?

- De acuerdo con la tabla anterior, ¿cuál es el resultado que se debe obtener al dividir $230 \div x$? _____

• Escriban la ecuación correspondiente: _____

- Despejen x . ¿Cuál es la distancia que pueden ver desde lo alto del edificio?

Comparen sus respuestas con las de sus compañeros. ¿Todos obtuvieron respuestas similares? En caso de que haya diferencias, busquen los posibles errores y corrijan en grupo.

© SANTILLANA

Correr con un papalote



Lee y responde.

Andrea vuela un papalote y ha soltado 10 m de cuerda, como se muestra en la imagen. Si el ángulo que forma la cuerda con la horizontal es de 30° , ¿cuánto mide la distancia horizontal entre una persona que esté directamente debajo del papalote y Andrea?

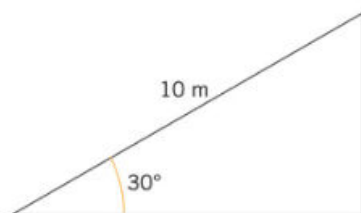
Traza en una hoja un triángulo rectángulo que tenga un ángulo de 30° entre la base y la hipotenusa.

- Mide cada uno de los lados del triángulo y anota las medidas.
- Calcula los siguientes cocientes y completa la tabla.

Ángulo	Cateto opuesto / hipotenusa	Cateto adyacente / hipotenusa	Cateto opuesto / cateto adyacente
30°			

El triángulo que trazaste es semejante al que se forma con la cuerda del papalote, la distancia entre la persona que está debajo del papalote y Andrea, y la distancia vertical del papalote al piso.

- Marca en el triángulo siguiente con la letra x la distancia que quieres encontrar.



- Si sabes que la longitud de la cuerda es de 10 metros y que el ángulo de elevación del papalote es de 30° , ¿cuál de los tres cocientes que calculaste y anotaste en la tabla anterior te conviene usar para calcular la distancia horizontal entre las dos personas? _____
- De acuerdo con la tabla anterior, ¿cuál es el resultado que debemos obtener al dividir $x \div 10$? _____
- Escribe la ecuación correspondiente: _____
- Despeja x . ¿Cuál es la distancia que separa a ambas personas? _____
- ¿Cómo encontrarías ahora la altura a la que está volando el papalote? _____

Compara tus respuestas con las de tus compañeros y juntos lleguen a conclusiones.

© SANTILLANA

Tareas

Resuelve los siguientes problemas en tu cuaderno. Para cada uno traza el triángulo rectángulo correspondiente y mide todos sus lados, o usa los resultados de la tabla que elaboraste junto con tus compañeros.

1. Lupita quiere saber cuánto mide el ancho del río que pasa detrás de su casa. Justo enfrente de ella, del otro lado del río hay un árbol. Ella camina 18 metros a lo largo del río y mide el ángulo que se forma entre el lugar en donde estaba parada inicialmente y el árbol. Si ese ángulo mide 60° , ¿cuánto mide el ancho del río?
 - a) Si Lupita caminó más lejos, hasta que el ángulo midiera 45° , ¿qué distancia caminó en total?
2. Encuentra la longitud de una resbaladilla si para llegar a la parte más alta hay que subir 6 escalones de 25 cm de peralte cada uno y el ángulo de elevación de la resbaladilla es de 40° .
3. Encuentra la altura de un triángulo equilátero cuyos lados miden 16 cm.
4. Utiliza los conocimientos que aprendiste en esta secuencia, y encuentra la longitud de la hipotenusa de un triángulo rectángulo isósceles que mide 1 metro en cada uno de los lados que forman el ángulo recto.

Comenta en clase con tus compañeros tus respuestas. Si tienes dudas, pide ayuda al profesor.

Presentación de nuestro trabajo

Cada equipo presentará su trabajo al grupo.

- Deben entregar su informe por escrito al profesor.
- Incluyan en su presentación fotografías de la construcción que eligieron.
- Muestren a sus compañeros el aparato que construyeron.
- Comenten los datos y las conclusiones que obtuvieron al calcular la altura del monumento o construcción que eligieron usando el aparato construido para medir ángulos de elevación.
- Platicuen acerca de su experiencia. ¿Cuál de los cocientes que relaciona los lados de un triángulo rectángulo usaron para calcular la altura?
- ¿Qué retos enfrentaron para medir la altura del edificio elegido? ¿Y para resolver los problemas de aplicación?

¿Cómo nos fue?

- ¿Qué dificultades encontraste para resolver los diferentes problemas planteados en esta secuencia?
- ¿Por qué es necesario trazar previamente un triángulo rectángulo, medir sus lados y calcular los cocientes, antes de poder resolver cualquiera de los problemas?
- ¿Qué tienes que tomar en cuenta para elegir el cociente que te conviene usar para resolver los diferentes problemas?
- ¿En cuáles situaciones de tu vida diaria tienes que relacionar ángulos con lados de triángulos rectángulos?

© SANTILLANA

Contenido

Explicitación y uso de las razones trigonométricas seno, coseno y tangente.

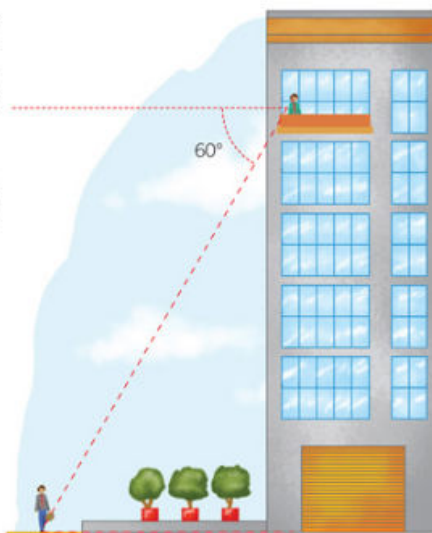
Desde las alturas

Lee la información y responde en el cuaderno.

Desde el mirador de un edificio, que se ubica a 140 m de altura, se observa a una persona caminando sobre la calle, el ángulo de depresión que se forma es de 60° .

Momentos más tarde, la misma persona ha caminado cierta distancia y el ángulo de depresión es de 30° .

- ¿A qué distancia del edificio se encontraba la persona cuando fue vista por primera vez?
- ¿Qué distancia ha caminado?
- Explica cómo se puede saber si la persona se acerca o aleja del edificio.



Comenta tus respuestas con tus compañeros.

A lo largo de las actividades regresarás a este problema. Antes, reúnete en equipo y lean en qué consiste el proyecto que realizarán durante esta secuencia, la forma de trabajo y los materiales que necesitarán.

Nuestro trabajo

Organizados en equipos de tres compañeros, harán un cartel donde presenten un problema real que requiera de las razones trigonométricas: seno, coseno o tangente, para calcular una distancia que no se puede medir directamente.

- Describirán el problema que van a resolver, las medidas que pudieron tomar, los instrumentos que utilizaron para medir y el procedimiento que siguieron para calcular los datos faltantes.
- Al final, presentarán el cartel al resto del grupo.

© SANTILLANA

Seno, coseno y tangente

En la secuencia anterior determinaron los cocientes que resultan de dividir dos de los tres lados de triángulos rectángulos con diferentes ángulos y los escribieron en una tabla. Por ejemplo, en la página 196 calcularon los siguientes valores:

Ángulo	Cateto opuesto/hipotenusa	Cateto adyacente/hipotenusa	Cateto opuesto/cateto adyacente
36°	0.59	0.81	0.73

Analiza la tabla anterior y responde.

¿Qué razones expresa? En matemáticas, a la razón **cateto opuesto** al ángulo entre la medida de la **hipotenusa** ($\frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}}$) se le llama **seno** y se abrevia **sen**.

- Según lo anterior, completa la expresión: $\text{sen } 36^\circ =$ _____

A la razón **cateto adyacente** al ángulo entre hipotenusa ($\frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}}$) se le llama **coseno** y se abrevia **cos**.

- Según lo anterior, completa la expresión: $\text{cos } 36^\circ =$ _____

Finalmente, a la razón **cateto opuesto** al ángulo entre **cateto adyacente** al ángulo ($\frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}}$) se le llama **tangente** y se abrevia **tan**.

- Según lo anterior, completa la expresión: $\text{tan } 36^\circ =$ _____

Retoma la tabla que elaboraron en la secuencia anterior, trázala en una hoja aparte y agrega columnas, como en el siguiente ejemplo.

Ángulo	Cateto opuesto/hipotenusa	sen	Cateto adyacente/hipotenusa	cos	Cateto opuesto/cateto adyacente	tan
15°						
18°						

- Consigue una calculadora que tenga las teclas **sin**, **cos** y **tan**. Úsala para calcular los valores de sin, cos y tan de los ángulos que aparecen en la primera columna.
- Compara los valores que anotaste en la tabla en la secuencia anterior con los que aparecen en la calculadora. En algunas calculadoras se teclea primero el ángulo y luego la tecla sin, cos o tan. En otras, primero se teclea sin, cos o tan y luego el valor del ángulo.
- ¿Qué tan cerca estuviste de los valores más exactos que te da la calculadora?



Historias de vida

Antes de que hubiera calculadoras electrónicas, se podían encontrar estos cocientes en unas **tablas trigonométricas** que se compraban en las librerías. Estas se elaboraron de la misma manera que como lo hiciste en la secuencia anterior: trazando muchos triángulos rectángulos, cada uno con diferentes medidas en los ángulos agudos, y calculando los respectivos cocientes de parejas de lados.

© SANTILLANA

Los lados faltantes

Observa el triángulo.

- ¿Cuánto suman los tres ángulos internos de un triángulo? _____

- El ángulo C está marcado como ángulo recto. ¿Cuánto mide el ángulo A ? _____

Las razones trigonométricas: **seno**, **coseno** y **tangente** nos permiten encontrar la longitud de los lados faltantes en triángulos rectángulos si conocemos la **longitud de uno de los lados** y un **ángulo agudo**.

Discute con tus compañeros cómo puedes encontrar el valor de a y de b usando las razones **trigonométricas** para el triángulo anterior.

Para encontrar todos los datos faltantes en el triángulo, contesta las siguientes preguntas.

- ¿Cuánto mide el ángulo agudo conocido? _____
- ¿Cuánto mide o con qué letra está indicado el cateto opuesto a dicho ángulo? _____
- _____
- ¿Cuánto mide o con qué letra está indicado el cateto adyacente? _____
- ¿Cuánto mide o con qué letra está indicada la hipotenusa? _____

- Sustituye los valores conocidos o las letras correspondientes en las siguientes expresiones.

• seno de $21^\circ = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}}$ $\text{sen } \square = \frac{\square}{\square}$

• coseno de $21^\circ = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}}$ $\text{cos } \square = \frac{\square}{\square}$

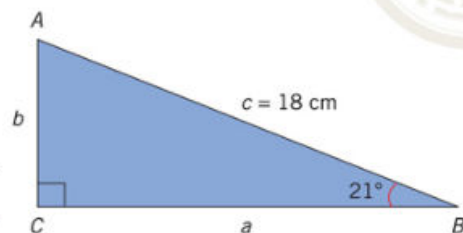
• tangente de $21^\circ = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}}$ $\text{tan } \square = \frac{\square}{\square}$

Busca en la tabla que construiste con tus compañeros los valores del seno, del coseno y de la tangente para el ángulo de 21° .

- ¿Se pueden resolver algebraicamente las tres ecuaciones anteriores? ¿Cuáles sí y cuáles no? _____

- Resuelve las ecuaciones con las que se pueda encontrar el valor de los catetos faltantes y anota los resultados.

• $a =$ _____ cm • $b =$ _____ cm



Glosario

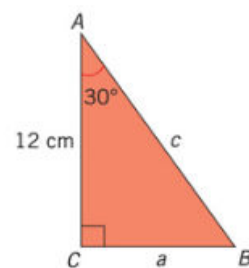
trigonometría. Es la rama de las matemáticas que estudia las relaciones entre los lados y los ángulos de los triángulos.

Espacio tecnológico

Eratóstenes de Cirene (273-194 a. de C.) usó la trigonometría para calcular cuánto mide la circunferencia de la Tierra. Consulta la página celestia.albacete.org/celestia/taller/feria1.htm en donde se explica cómo lo logró y qué tan precisos fueron sus resultados (consulta: 23 de diciembre de 2016, 11:46 horas)

Discute con tus compañeros por qué la fórmula de tangente no fue útil para encontrar los valores.

- Repite el proceso anterior y establece las tres razones trigonométricas para el siguiente triángulo.



$\text{sen } \square = \frac{\square}{\square}$

$\text{cos } \square = \frac{\square}{\square}$

$\text{tan } \square = \frac{\square}{\square}$

- Busca en la tabla que elaboraste con tus compañeros los valores del seno, del coseno y de la tangente para el ángulo agudo correspondiente a este problema.
- ¿Se pueden resolver algebraicamente las tres ecuaciones anteriores? ¿Cuáles sí y cuáles no? _____
- Resuelve las ecuaciones con las que se pueda encontrar el valor del cateto faltante y de la hipotenusa.

Discute con tus compañeros por qué no fue útil la fórmula de seno para encontrar estos valores.

Reúnete con tus compañeros de proyecto y realiza las actividades.

Lean las preguntas y tracen un triángulo para cada una. Inventen los valores del ángulo y del cateto o de la hipotenusa conocidos. Indiquen los demás lados con letras, determinen la razón trigonométrica que les permita responder correctamente cada pregunta y resuelvan algebraicamente cada ecuación.

- ¿Qué razón trigonométrica usarían si conocen la medida de un ángulo agudo y la longitud de su cateto opuesto y quieren conocer la medida de la hipotenusa?

- ¿Qué razón trigonométrica usarían si conocen la medida de un ángulo agudo y la longitud de su cateto opuesto y quieren conocer la medida de su cateto adyacente?

- ¿Qué razón trigonométrica usarían si conocen la medida de un ángulo agudo y la longitud de su cateto adyacente y quieren conocer la medida de la hipotenusa?

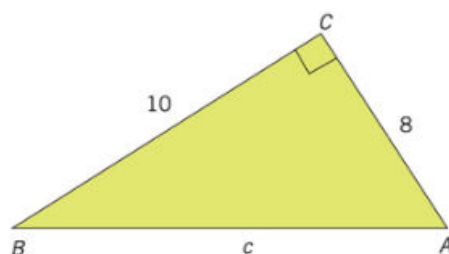
- ¿Qué razón trigonométrica usarían si conocen la medida de un ángulo agudo y la longitud de su cateto adyacente y quieren conocer la medida del cateto opuesto?

- ¿Qué razón trigonométrica usarían si conocen la medida de un ángulo agudo y la longitud de la hipotenusa y quieren conocer la medida del cateto adyacente?

El ángulo faltante

Resuelve.

También podemos usar las razones trigonométricas para encontrar el ángulo faltante. Observa la figura y establece las tres razones trigonométricas para el ángulo A y para el ángulo B .



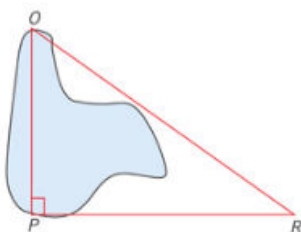
$$\begin{aligned} \text{sen } A &= \frac{\square}{\square} & \text{cos } A &= \frac{\square}{\square} & \text{tan } A &= \frac{\square}{\square} \\ \text{sen } B &= \frac{\square}{\square} & \text{cos } B &= \frac{\square}{\square} & \text{tan } B &= \frac{\square}{\square} \end{aligned}$$

- ¿En qué ecuaciones pudiste escribir los dos datos faltantes? _____
- Resuelve las fracciones y conviértelas en decimal.
- Si conoces el valor del seno, del coseno o de la tangente de un ángulo, ¿cómo podemos encontrar el valor del ángulo? _____
- Discute con tus compañeros las diferentes maneras de encontrarlo.
- Busca en la tabla que elaboraron el valor más cercano al que obtuviste al simplificar la fracción, cuida que corresponda a la razón trigonométrica correcta.
 - ¿A qué ángulo corresponde ese valor? _____
- Repite el proceso para el otro cociente que tienes en forma decimal. ¿A qué ángulo corresponde ese valor? _____

Confirma que la suma de los tres ángulos del triángulo sea 180° . Si es así, has encontrado correctamente los valores de los ángulos faltantes.

Tareas

Resuelve los problemas en el cuaderno. Al terminar, elabora una conclusión acerca de cómo utilizaste la trigonometría para resolverlos.



1. Un submarino desciende formando un ángulo de 15° respecto de la superficie del mar. Si avanza 600 metros en línea recta, ¿cuál será su profundidad? Establezcan las tres razones trigonométricas. ¿Cuál te sirve para resolver este problema?
2. La gran pirámide de Keops, en Egipto, tiene una base cuadrada que mide 230 m en cada uno de sus lados. Las caras triangulares de la pirámide forman un ángulo de 52° respecto del piso horizontal. ¿Qué tan alta es la pirámide?
3. Como no puede medir directamente el ancho PO de un lago, como el de la figura de la izquierda, una persona parada en el punto P fija la mirada en el punto O , camina 200 metros hacia el punto R de tal manera que PO y PR formen un ángulo de 90° , y mide el ángulo $PRO = 40^\circ$. Establezcan las tres razones trigonométricas. ¿Cuál les sirve para calcular la distancia PO ? ¿Cuánto mide el ancho PO del lago?

© SANTILLANA

4. Las curvas en las carreteras deben estar **peraltadas** para evitar que los coches derrapen. El ángulo de peralte depende de la velocidad de los vehículos que circulen en esa curva. La siguiente fórmula relaciona el ángulo de peralte θ , la velocidad (v) en metros sobre segundo, el radio de la curva (r) en metros y g , que es la constante gravitacional, 9.8 m/s^2 :

$$\tan \theta = \frac{v^2}{rg}$$

- Si una curva de una carretera está peraltada 36° y el radio de la curva es de 1.7 km, ¿para qué velocidad está diseñada la curva?

Glosario

peraltar. Levantar la parte exterior de una curva en una carretera.

¿Cómo vamos?

Reúnanse en equipo y revisen sus avances.

- Decidan cuál distancia que no se puede calcular directamente elegirán y póngase de acuerdo en la forma de lograrlo.
- Con base en los datos conocidos o medidos, elijan la relación trigonométrica que les conviene usar para calcular los datos faltantes.

¿Qué distancia caminó?

Retoma el problema inicial y responde en tu cuaderno.

- Traza un triángulo rectángulo en donde el ángulo de depresión sea de 60° .
- Anota las medidas conocidas en el triángulo y calcula los datos que faltan.
- Repite el proceso anterior para otro triángulo rectángulo en donde el ángulo de depresión sea de 30° .
- Con base en los resultados anteriores, ¿qué operación debes llevar a cabo para calcular la distancia que caminó el peatón?
- Si primero hubieras medido un ángulo de depresión de 30° y luego de 60° , ¿en qué dirección caminaría la persona?

Reúnete con tus compañeros y comparen sus respuestas. Analicen con el profesor sus resultados.

Presentación de nuestro trabajo

Con sus compañeros de equipo, presenten su cartel.

- ¿Cuál fue el problema que resolvieron?
- ¿Cuál fue la distancia que pudieron calcular indirectamente?
- ¿Qué razón trigonométrica emplearon para la resolución del problema?
- ¿Qué retos enfrentaron para tomar las medidas?
- ¿Creen que sea útil la trigonometría? ¿Por qué?

¿Cómo nos fue?

Escribe un párrafo en el que describas aplicaciones de la trigonometría para solucionar diferentes situaciones problemáticas que sería imposible resolver sin esta rama de las matemáticas.

© SANTILLANA

Contenido

Cálculo y análisis de la razón de cambio de un proceso o fenómeno que se modela con una función lineal. Identificación de la relación entre dicha razón y la inclinación o pendiente de la recta que la representa.

Recorrido en bicicleta

Lee la información, analiza las gráficas y responde.

Marta es una universitaria a la que le gusta andar en bicicleta. El lunes y martes de la semana anterior recorrió el mismo camino con su bicicleta. La gráfica muestra, para cada día, el trayecto que hizo en relación con la distancia y el tiempo. A partir de la gráfica, ¿cómo podrías averiguar qué día viajó Marta a mayor velocidad?



- ¿Qué distancia recorrió Marta en los primeros 15 minutos el lunes? ¿Y el martes?
- ¿Cuántos minutos tardó en realizar el recorrido completo cada día?
- ¿Qué sucede con la distancia en cada uno de los días cuando el tiempo aumenta, por ejemplo, el doble o el triple?
- ¿Viaja a la misma velocidad durante todo el recorrido en cada uno de los días? ¿Cómo lo sabes?
- ¿Cómo puedes saber el día que Marta viajó a mayor velocidad a partir de la gráfica?
- Reflexiona. ¿Qué significado puedes darle al término "razón de cambio" en una función lineal?

Compara tus respuestas con las de otros compañeros. Si hay dudas o diferencias, compártelas con el profesor para solucionarlas.

Antes de continuar con el trabajo de la secuencia, lean la información del proyecto que realizarán.

Nuestro trabajo

En pareja, elaborarán un informe en el que se muestre un análisis de cómo cambia la distancia recorrida por un maratonista con respecto al tiempo a medida que avanza en su carrera.

- Deberán suponer que el maratonista va a velocidad constante, pero que esta cambia en distintos tramos del recorrido.
- Elaborarán tablas, gráficas y expresiones algebraicas para representar el recorrido del maratonista.
- A lo largo de las actividades conocerán el significado de **razón de cambio** y en la sección "¿Cómo vamos?", obtendrán la información para su proyecto.

Marta y su recorrido

Observa nuevamente la gráfica de la página anterior y resuelve.

- ¿Cuánto tardó Marta en realizar el recorrido completo de 20 kilómetros en cada día? _____
- ¿Qué distancia llevaba recorrida en cada trayecto a los 20 minutos? _____
- ¿Cuánto avanzó en cada caso al transcurrir 5 minutos? _____
- Completa la tabla según la información de la gráfica.

Tiempo (min)	Tabla 1	
	Distancia recorrida (km)	
	Lunes	Martes
0	0	0
5	2.5	2
10		
15		
20		
25		
30		
35		
40		
45		
50		

- ¿Cuánto avanzó Marta el lunes en los primeros 5 minutos? _____
- ¿Y el martes? _____
- ¿Cuánto avanzó el lunes del minuto 15 al 20? _____ ¿Y del 20 al 40? _____
- ¿Y el martes en los mismos periodos? _____

- Con base en la tabla anterior y la gráfica del inicio, completa la siguiente tabla con la distancia recorrida cada 5 minutos en cada uno de los dos días.

Tabla 2		
Periodos (min)	Distancia recorrida (km) en cada periodo	
	Lunes	Martes
0-5		
5-10		
10-15		
15-20		
20-25		
25-30		
30-35		
35-40		
40-45		
45-50		

- ¿Cuánto aumenta la distancia recorrida el lunes cada vez que el tiempo aumenta 5 minutos? ¿Y el martes?
- Completa la tabla que muestra la distancia recorrida cada vez que el tiempo aumenta 10 minutos en cada día.

Tabla 3		
Periodos (min)	Distancia recorrida (km) en cada periodo	
	Lunes	Martes
0-10		
10-20		
20-30		
30-40		
40-50		

- ¿Qué diferencias encuentras entre las tablas de periodos de 5 minutos y 10 minutos? ¿Qué semejanzas? _____
- Observa nuevamente la gráfica y responde.
 - Para el lunes, ¿cuánto aumenta la distancia recorrida por Marta cada vez que el tiempo aumenta un minuto? _____
 - ¿Y para el martes? _____

Compara tus respuestas con las de tus compañeros y valídenlas en grupo.

Cálculo de la razón de cambio

Retomen las tablas que completaron y la gráfica de inicio y resuelvan en pareja.

En la tabla 1 pueden observar que, en cada día, cada vez que el tiempo aumenta, la distancia recorrida también aumenta en la misma proporción, es decir, si el tiempo incrementa el doble, la distancia lo hace de la misma forma.

- ¿Qué significa esto? _____
- En la tabla 2, la distancia que recorre Marta cada que el tiempo aumenta 5 minutos, siempre es la misma.
 - ¿Sucede lo mismo cada vez que el tiempo aumenta 10 minutos? ¿Por qué? _____
 - ¿De qué manera puedes saber en qué día la velocidad de Marta fue mayor si consideras la distancia que la bicicleta avanzó en 5 minutos? _____
 - Y si consideras la distancia recorrida cada 10 minutos, ¿cómo sabes qué día Marta avanzó a una mayor velocidad? _____
- Expresen la velocidad de Marta el lunes como una relación entre la manera en que aumentó la distancia a medida que el tiempo transcurrió de los 15 a los 20 minutos de recorrido:

$$\text{Velocidad} = \frac{\text{Cambio de distancia}}{\text{Cambio en el tiempo}} = \frac{10 \text{ km} - 7.5 \text{ km}}{20 \text{ min} - 15 \text{ min}} = \frac{\quad}{5 \text{ min}} = \quad$$

- Ahora expresen, de manera similar, la velocidad de Marta el día martes:

$$\text{Velocidad} = \frac{\text{Cambio de distancia}}{\text{Cambio en el tiempo}} = \frac{\quad}{20 \text{ min} - 15 \text{ min}} = \quad = \quad$$

- Calculen la velocidad del lunes y del martes con el tiempo transcurrido entre los 35 y los 40 minutos:

$$\text{Velocidad} = \frac{\text{Cambio de distancia}}{\text{Cambio en el tiempo}} = \frac{\quad \text{ km} - \quad \text{ km}}{40 \text{ min} - 35 \text{ min}} = \quad = \quad$$

$$\text{Velocidad} = \frac{\text{Cambio de distancia}}{\text{Cambio en el tiempo}} = \quad = \quad = \quad$$

- ¿Cuál de los dos días avanzó Marta a una mayor velocidad? ¿Cómo lo determinaron? _____
- Escriban una ecuación que represente la relación entre el tiempo y la distancia para cada recorrido. Utiliza **t** para representar el tiempo y **d** para la distancia.
 - Lunes: _____
 - Martes: _____
- Compara tus resultados con los de algún compañero. ¿Cómo encontró cada uno las ecuaciones? ¿Utilizaron el mismo procedimiento?

Comparen sus respuestas con las de tus compañeros y coméntenlas con el profesor.

Glosario

pendiente. En la ecuación de cualquier recta, por ejemplo $y = mx + b$, al coeficiente de x (es decir m) se le llama pendiente de la recta. Este número nos indica qué tan inclinada está la recta.

ordenada al origen. En la ecuación de cualquier recta, por ejemplo $y = mx + b$, a la constante b se le llama ordenada al origen. Este número nos indica en qué punto cruza la recta con el eje y .

Recuerda que en las ecuaciones de la forma $y = mx + b$, m se llama **pendiente** y b se llama **ordenada al origen**. En el caso de Marta, tenemos dos ecuaciones de la forma $d = mt$.

- Identifiquen la pendiente y la ordenada al origen en sus ecuaciones.

La **razón de cambio** representa la manera en que cambia una de las variables (por ejemplo, la distancia) al cambiar la otra variable (el tiempo). Por ejemplo, si cada 5 minutos avanzó 10 kilómetros, la razón de cambio de la distancia con respecto al tiempo es de $\frac{10}{5} = 2$.

- Observen que en el problema anterior, el valor de la pendiente en cada ecuación corresponde a la velocidad de la bicicleta de Marta.
 - ¿Qué significaría que la pendiente entre el minuto 35 y el minuto 40 fuera mayor?

- Las rectas, que se muestran al inicio, representan el recorrido de Marta, son las gráficas de las ecuaciones.
 - En este caso, ¿cuál es el significado de la razón de cambio en las líneas rectas?

 - ¿Cuál de las dos gráficas tiene una mayor pendiente? Justifiquen.

 - ¿Cómo se relaciona la pendiente con los valores que aparecen en las tablas que completaron? _____

Compara tus respuestas con las de otros compañeros.

¿Cómo vamos?

Reúnanse en equipo para trabajar en el informe de su proyecto.

- Para su informe, investiguen cuántos kilómetros se corren en un maratón y cuánto tarda una persona, en promedio, en completarlo. Para esto, elijan a un corredor, hombre o mujer.
- Dividan el recorrido total en al menos cinco segmentos de distinta longitud y asignen, de la manera que deseen, un tiempo determinado en el que su maratonista recorrerá cada uno.
- Por ejemplo, pueden suponer que en un segmento el maratonista disminuye la velocidad debido a que la calle tiene una subida pronunciada, pero en otro segmento se recupera, etcétera. Para cada segmento la velocidad debe ser constante.

La pendiente como razón de cambio

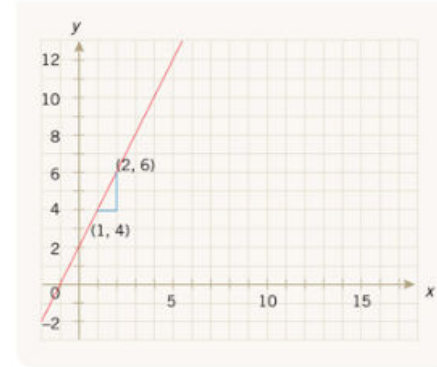
Lean la información y resuelvan en equipo.

En situaciones como la del recorrido de Marta con la bicicleta, en las que una variable está relacionada con otra de manera lineal, la razón de cambio, es decir, el número que indica la manera en que cambia una de las variables (la distancia) cuando la otra cambia (el tiempo), es siempre el mismo. Esto quiere decir, en el ejemplo, que Marta viajó en la bicicleta a la misma velocidad durante todo el recorrido de cada día.

La pendiente indica la razón de cambio de las ordenadas (y) respecto a las abscisas (x):

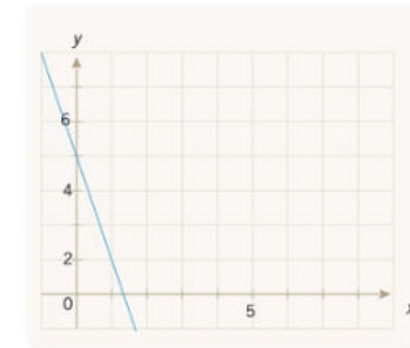
$$\text{Velocidad} = \frac{\text{Cambio en } y}{\text{Cambio en } x}$$

- ¿Cómo se puede calcular la pendiente de una recta cuando se tienen dos puntos?
- Analicen la siguiente gráfica.



La línea azul nos dice que por cada unidad que x aumenta su valor, y aumenta dos unidades.

- Si utilizáramos el punto $(0, 2)$, ¿cuál es la razón de cambio en este caso? Representala.
 - Razón de cambio = $m = \frac{6 - 2}{2 - 0} =$ _____
- Ahora, analicen la siguiente gráfica.



- ¿Cuál es la pendiente de la siguiente recta? _____
- Razón de cambio = $m =$ _____

Observa que el valor de m en este caso es un número negativo.

- Compara esta recta con la anterior, cuya pendiente fue positiva. ¿En qué son diferentes las rectas? _____
- Tracen en su cuaderno una gráfica con pendiente negativa y determinen la razón de cambio.

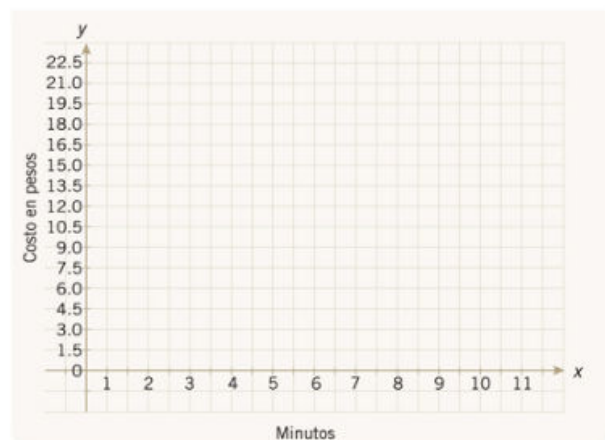
Comparen sus resultados con los de otros compañeros. En grupo determinen la manera de calcular la razón de cambio en una gráfica y registren sus acuerdos.

Larga distancia

Lee la información y resuelve.

Tomás realiza llamadas telefónicas a Estados Unidos de América por medio de una compañía de teléfonos que cobra cierta cantidad por cada minuto, además de una cuota de \$5 por llamada. En febrero, Tomás realizó una llamada de 10 minutos de duración que le costó \$17.50.

- Si aumentara un minuto la duración de la llamada, ¿cuánto costaría? Explica.
- ¿Cuál es la razón de cambio del costo de la llamada respecto a su duración, es decir, cómo cambia el costo a medida que varía el tiempo?
- Para responder lo anterior, realiza una gráfica en la que muestres cómo cambia el costo de la llamada según su duración y ubica dos pares ordenados.



Debido a que el costo total por llamada incluye \$5 fijos, esta cantidad no afecta la razón de cambio que refleja la relación entre el cambio en el costo y el cambio en el tiempo. Utiliza los pares ordenados que ubicaste para calcular la razón de cambio.

$$\text{Razón de cambio} = \frac{\text{Cambio en el costo (\$)}}{\text{Cambio en el tiempo}} = \frac{\quad}{\quad} = \frac{\quad}{\quad}$$

- ¿Cuál es la razón de cambio por llamada?
 - ¿Cuánto costaría la llamada si durara 11 minutos? ¿Y una llamada de 8 minutos?

- En abril, Tomás realizó una llamada de 12 minutos por la que pagó \$77. Si suponemos que la cuota fija por llamada sigue siendo de \$5, ¿cuánto es el costo por minuto? Calcula la razón de cambio:

$$\text{Razón de cambio} = \frac{\text{Cambio en el costo (\$)}}{\text{Cambio en el tiempo}} = \frac{\quad}{\quad} = \frac{\quad}{\quad}$$

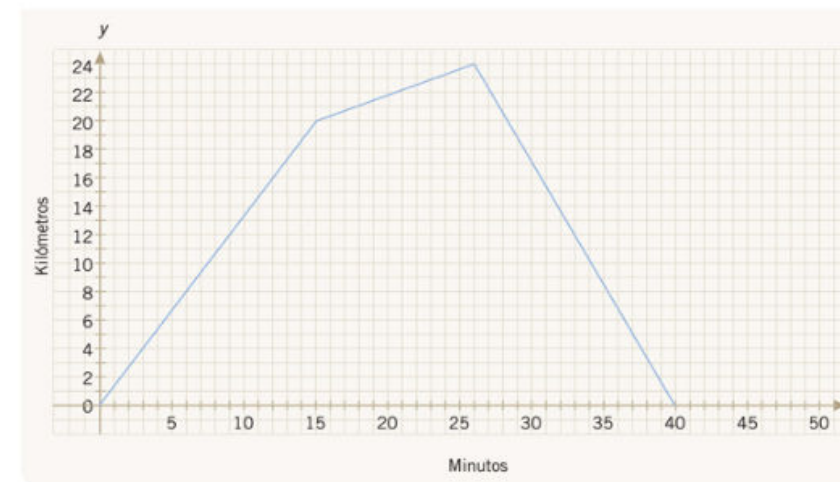
- En este caso, ¿cuál sería el costo de una llamada de 20 minutos de duración? ¿Y de 5 minutos?
- En el plano cartesiano anterior, realiza una gráfica mostrando la relación entre la duración de la llamada y el costo en el mes de abril.
 - ¿En qué mes es más caro el minuto de llamada? ¿Cómo se ve esto en la gráfica?

Compara tus respuestas con las de tus compañeros y coméntalas con el profesor.

Viaje en automóvil

Analiza la gráfica y responde.

La siguiente gráfica muestra la relación entre la distancia y el tiempo de recorrido de un automóvil.



- ¿Qué tan lejos estuvo el automóvil del punto de partida? _____
- ¿Cuánto tiempo le tomó hacer el viaje completo? _____
- ¿Cuál es la distancia total recorrida por el automóvil? _____
- En la gráfica hay tres segmentos de recta con inclinaciones diferentes. ¿Qué te dice esto con respecto a la velocidad del automóvil?

Comenta con el profesor y con tus compañeros.

- Calcula la pendiente de cada uno de los segmentos de recta. Para hacerlo, determina la razón de cambio de la posición y con respecto al tiempo x .

$$\text{Pendiente 1} = \frac{\text{Cambio en } y}{\text{Cambio en } x}$$

$$\text{Pendiente 2} = \frac{\quad}{\quad}$$

$$\text{Pendiente 3} = \frac{\quad}{\quad}$$

- ¿Cuál segmento de recta tiene una mayor inclinación? _____
- ¿En qué parte del recorrido el automóvil viajó a una mayor velocidad? _____

Seguramente en el caso de la pendiente 3 obtuviste un número negativo. Esto indica que el automóvil regresó a su punto de origen. La velocidad, sin embargo, sigue siendo positiva, es decir, el signo negativo nos indica únicamente que el automóvil avanzó de regreso hacia el origen.

Compara tus respuestas con las de otros compañeros. En grupo, registren sus conclusiones en su cuaderno, acerca de la razón de cambio en una función lineal.

René Descartes inventó las coordenadas cartesianas un día en que estaba acostado contemplando absorto los *ires y venires* de una mosca, que volaba por el techo de su cuarto.

En esa época Descartes se interesaba especialmente en el estudio de las curvas y la manera de describirlas matemáticamente. El vuelo de la mosca por el techo se podía describir por medio de una curva en un plano. Los puntos de la curva eran las posiciones que iba ocupando la mosca en su andar.

Para describir la curva matemáticamente, pensó Descartes, bastaría con tener una manera de especificar la posición de cada punto en el plano y esto se logra fijando en el plano dos ejes perpendiculares entre sí (por ejemplo, eje x y eje y). Cada punto queda especificado por un par de coordenadas (x, y) , cuyo valor es la distancia perpendicular del punto a cada uno de los ejes. De esta manera, la descripción de la curva resulta dada por la relación de los puntos por los que pasó la mosca, definidos por la distancia, en cada instante, de la mosca a cada uno de los ejes del plano.

¿Cómo vamos?

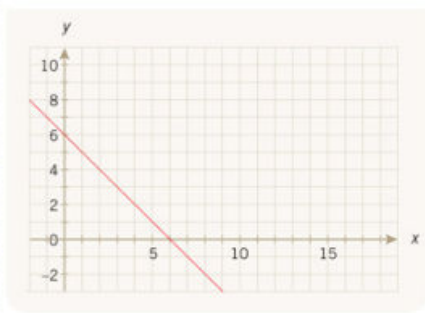
Reúnanse en equipo y retomen su proyecto.

- Calcula, para el caso del maratonista que elegiste, la razón de cambio para cada uno de los tramos que definiste en el recorrido. ¿Cuál es la velocidad en cada caso?
- Traza una gráfica que muestre la relación entre el tiempo y la distancia a medida que el maratonista realiza la carrera. ¿Cuál es la pendiente en cada caso?
- ¿Qué has aprendido hasta ahora sobre la razón de cambio y la pendiente?

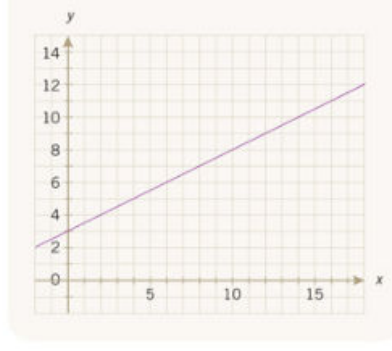
Tareas

Realiza las siguientes actividades.

1. Un atleta recorrió 20 kilómetros en 85 minutos a una velocidad constante.
 - a) Expresa su velocidad como una razón de cambio.
 - b) Realiza en el cuaderno una gráfica que relacione la distancia recorrida con el tiempo transcurrido.
2. Encuentra la pendiente de las rectas. Utiliza dos puntos cualesquiera en cada recta para calcular la razón de cambio.



Pendiente: _____



Pendiente: _____

3. Escribe la ecuación que corresponde a cada recta del ejercicio 2.

Tarjetas de prepago

Analiza la información de la tabla y resuelve con un compañero.

Tarjeta	Costo (\$)	Tiempo aire
Golden	60.4	3 h 28 min
	121	6 h 56 min
	217	13 h 53 min
	543	34 h 43 min
Charro	1 087	69 h 26 min
	60.4	3 h 12 min
	121	6 h 24 min
	242	12 h 49 min
Conti- nental	604	32 h
	1 207	64 h 6 min
	60.4	112 min
	121	3 h 44 min
	242	7 h 29 min
	604	18 h 43 min
	1 207	37 h 27 min

En la actualidad existen tarjetas telefónicas de prepago que reducen los costos por llamada a nivel nacional e internacional.

A continuación, se presenta, para varias tarjetas, una tabla con las razones de costo por minuto para llamar a Estados Unidos de América.

- Determinen la razón de cambio en cada caso.
 - ¿Cuál es la tarjeta más conveniente para hacerlo? Justifiquen su respuesta.

Compara tus respuestas y estrategias de solución con las de otro compañero y validalas con el profesor.

Presentación de nuestro trabajo

Intercambien con otra pareja del grupo las gráficas y cálculos realizados para los maratonistas y compárenlas.

- ¿Hubo respuestas diferentes? ¿A qué se deben las diferencias?
- ¿Qué procedimientos utilizaron para calcular la velocidad de los maratonistas en los diferentes tramos?
- ¿Cuál fue la máxima velocidad de cada maratonista? ¿Y la mínima?
- Cuando se dice "velocidad como razón de cambio", ¿qué variables son las que cambian?

En una discusión con todo el grupo, comenten los resultados que obtuvieron las distintas parejas en sus proyectos.

¿Cómo nos fue?

A lo largo de las actividades aprendiste el significado de la razón de cambio entre dos magnitudes que se relacionan de manera lineal.

- Explica qué es la razón de cambio entre dos variables y qué relación tiene con la gráfica que las representa.
- Define la frase "pendiente como razón de cambio".
- Si tienes la gráfica de una recta pero no tienes su ecuación, ¿cómo puedes calcular su pendiente?
- ¿Se te dificultó la comprensión del tema? Si tienes dudas plantéalas al profesor y discútanlo en grupo.

Contenido

Medición de la dispersión de un conjunto de datos mediante el promedio de las distancias de cada dato a la media (desviación media). Análisis de las diferencias de la "desviación media" con el "rango" como medidas de la dispersión.

¡Qué tan dispersos!

Lee la siguiente situación, analiza los datos que se proporcionan y contesta en tu cuaderno.

En un colegio de secundaria se llevó a cabo un estudio acerca del peso de las mochilas que llevan los alumnos de tercer grado. En el grupo de 3.º A se obtuvieron los siguientes datos. El peso está dado en kilogramos.

Mochilas de las mujeres de 3.º A:

2.6, 2.3, 3.5, 2.1, 3.6, 3.7, 1.5, 5.0, 4.2, 6.2, 4.3, 4.5

Mochilas de los hombres de 3.º A:

3.8, 2.5, 10.0, 2.6, 9.4, 3.1, 9.0, 8.3, 3.5, 4.3, 7.5, 7.2, 4.5, 5.6, 6.2, 5.8

- ¿Cuál es el peso promedio de las mochilas de las mujeres del salón?
- ¿Y el promedio del peso de las mochilas de los varones?
- ¿Qué tan separados o dispersos se encuentran los pesos de las mochilas con respecto al promedio en cada caso?
- ¿Cómo medirías la separación o dispersión de los datos en cada caso, tomando como referencia el peso medio o peso promedio?

Comenta tus respuestas con el grupo y resuelve las dudas. Después escribe tus conclusiones en el cuaderno.

Antes de continuar, lee las características del proyecto que debes realizar a lo largo de esta secuencia didáctica.

Nuestro trabajo

En equipos de cuatro integrantes realizarán una **investigación** acerca del número de pulsaciones de cada uno de los compañeros de equipo, antes y después de hacer actividad física moderada, por ejemplo, antes y después de la clase de Educación Física.

- Juntarán los datos de cada equipo y calcularán el promedio de pulsaciones en los varones y en las mujeres del salón.
- Analizarán y calcularán qué tan dispersos se encuentran los datos en cada caso con respecto a la media.
- Realizarán una gráfica de barras para representar los datos de las mochilas de mujeres y otra para los datos obtenidos en el caso de los hombres.

Más adelante, en la secuencia encontrarán instrucciones adicionales para trabajar en su proyecto.

El peso de las mochilas

Reunidos en equipos de tres integrantes, resuelvan lo siguiente.

Retomen la actividad inicial sobre el peso de las mochilas de los alumnos de 3.º A.

- Escriban el peso medio de las mochilas de las mujeres. _____
- Escriban el peso medio de las mochilas de los hombres. _____
- Ordenen de menor a mayor los pesos de las mochilas de las mujeres y ubiquen en el lugar correspondiente el valor del peso medio. _____

- ¿Cuáles son el peso mínimo y el máximo en las mochilas de las mujeres? _____

- ¿Cuál es la diferencia entre el peso mínimo y el promedio? ¿Y entre el peso máximo y el promedio? _____

- ¿Cuál es la diferencia entre el valor máximo y el mínimo? _____

- Ordenen en el cuaderno, de menor a mayor, los pesos de las mochilas de los varones y ubiquen en el lugar correspondiente el peso medio. _____
- ¿Cuál es el peso mínimo y el máximo de las mochilas de los varones? _____

- ¿Cuál es la diferencia entre el peso mínimo y el promedio? ¿Y entre el peso máximo y el promedio? _____

- ¿Cuál es la diferencia entre el valor máximo y el mínimo? _____

A la diferencia entre el valor máximo y el mínimo se le llama **rango**. El rango es la medida de dispersión más sencilla y, por tanto, la que proporciona menos información.

- Calculen para los datos de las mochilas de las mujeres la distancia o desviación de cada dato con respecto al peso promedio. _____

- Reflexionen y encuentren una forma de medir esta distancia o **desviación media** de los datos con respecto al peso promedio, en cada caso. _____

- Escriban con sus palabras la forma en que decidieron calcular la desviación media de los pesos de las mochilas de las mujeres respecto al peso promedio. _____

Comparen sus respuestas con las de otro equipo e identifiquen las similitudes y diferencias. Si tienen dudas, coméntenlas con el profesor.

La **desviación media** indica el grado de concentración o de dispersión de los valores de la variable. Si es muy alta, indica gran dispersión; si es muy baja refleja un buen agrupamiento y que los valores son parecidos entre sí. La desviación media para un conjunto de datos se calcula dividiendo la suma de las distancias de cada dato al valor de la media, entre el total de datos.

¿Cómo vamos?

Reúnete con tu equipo para empezar a trabajar en su proyecto.

Lean las siguientes instrucciones para medir las pulsaciones de sus compañeros de equipo. No se olviden de medirlas antes y después de hacer ejercicio.

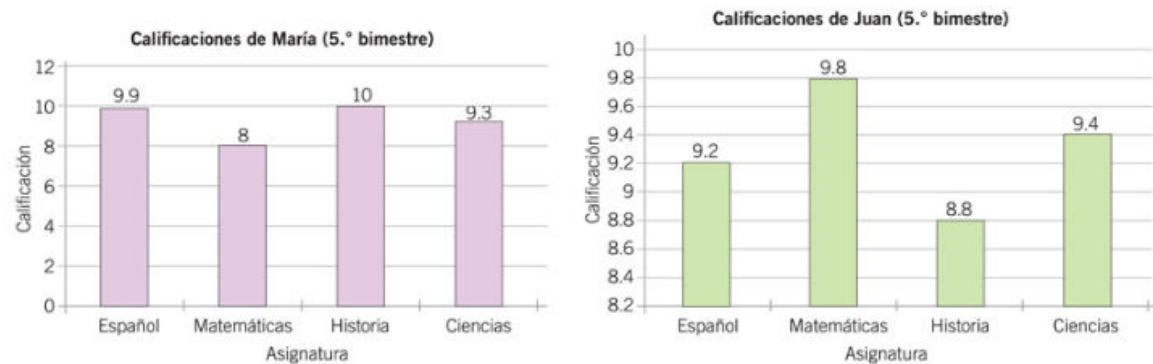
- Coloquen los dedos índice y medio sobre la carótida, como se muestra en la ilustración de la página 42. El pulso no se puede tomar con el dedo pulgar, ya que este tiene pulso propio.
- Con un reloj cuenten la cantidad de latidos en 15 segundos.
- Multipliquen por 4 el resultado obtenido para encontrar la cantidad de pulsaciones por minuto.
- Anoten los resultados obtenidos por los equipos en una tabla. Separen los datos de las mujeres y varones, antes y después de la actividad física.
- Investiguen los valores normales de pulsaciones por minuto en jóvenes de su edad, en reposo y después de hacer ejercicio físico.

¿A quién le corresponde la beca?

Lee la siguiente situación, analiza los datos y responde.

En una escuela secundaria se otorgará una beca para la inscripción a la preparatoria a quién haya tenido el mejor promedio en el último bimestre de tercero de secundaria. Para calcular el promedio solamente se consideraron algunas asignaturas. Los mejores alumnos fueron Juan y María.

A continuación se presentan histogramas con las calificaciones de cada uno.



- Calcula el promedio de cada uno de los estudiantes. _____

- Calcula el rango de las calificaciones de cada estudiante. _____
- Calcula la desviación media de las calificaciones de María y de Juan respecto a la calificación promedio.
 - En cada caso, ¿existe alguna diferencia entre la información que proporciona el rango de los datos y la desviación media? Justifica tu respuesta. _____
 - Si la beca se otorga solamente a un estudiante, ¿a cuál de los dos se la darán? Explica el porqué de tu elección. _____

Comenta tus respuestas con el grupo y con tu profesor.

Tareas

Resuelve la siguiente actividad en tu cuaderno.

1. La altura y el peso de los diez alumnos más altos de tercer grado de secundaria se muestra en la siguiente tabla:

Alumno	Altura (cm)	Peso (kg)
Nicolás	157	58
Olmo	168	72
Roberto	163	65
Santiago	145	49
Alfredo	161	64
Oscar	157	60
David	148	52
Francisco	159	61
Axel	168	70
Daniel	171	72

- a) Calcula el rango de los datos de la altura y el peso.
- b) Calcula la altura y el peso promedio de los diez alumnos.
- c) Calcula la desviación media de los datos de la altura.
- d) Calcula la desviación media de los datos del peso.
- e) ¿Cuál de los valores te da más información? ¿El rango o la desviación media? ¿Por qué?
- f) ¿En cuál de las variables, peso o altura, los datos se dispersan menos? Justifica tu respuesta.

Revisa tu tarea con el grupo y corrige tus errores, en caso de haberlos.

¿Cómo vamos?

Reúnanse en equipo para terminar su proyecto.

- Calculen el promedio de las pulsaciones de las mujeres y de los hombres del salón, en estado de reposo y después de hacer ejercicio físico.
- Calculen la desviación media en cada caso.
- ¿En qué caso la desviación media de los datos es mayor? ¿Por qué consideran que sucede esto?

La temperatura en un día

Reúnete con un compañero y resuelvan la siguiente actividad.

La gráfica muestra la temperatura a diferentes horas del 19 y 20 de mayo de 2013, en la Ciudad de México.



- ¿A qué hora se presentó la temperatura más alta? ¿Y la más baja? _____
- ¿Cuál es el rango de las temperaturas? _____
- Calcula la temperatura promedio del día. _____
- Calcula la desviación media de las temperaturas. _____
- ¿Qué tan alta o baja es la desviación de los datos respecto al promedio? _____

El siguiente gráfico muestra las temperaturas máximas y mínimas que se registraron durante la misma semana.



- Traza el histograma o gráfica poligonal correspondiente a cada temperatura, máxima y mínima. Después resuelve.



- ¿Cuál es el rango de las temperaturas máximas y mínimas? _____
- Calcula la temperatura máxima y mínima promedio. _____
- ¿Cuál es la desviación media de las temperaturas, en cada caso? _____
- ¿Qué tan alta o baja es la desviación de los datos respecto al promedio? _____

Compara tus respuestas con las de otros compañeros. Comenta acerca de la estrategia que utilizaste y registra tus conclusiones.

Presentación de nuestro trabajo

Reúnete con tu equipo y presenten a sus compañeros los resultados del estudio que realizaron, así como la gráfica de barras que trazaron.

- Expliquen a sus compañeros cómo calcularon el promedio de pulsaciones en cada caso.
- ¿Existe variación en el promedio de pulsaciones en estado de reposo, entre las mujeres y los hombres de su grupo?
- ¿Los valores que obtuvieron están dentro del rango normal?
- Expliquen cómo obtuvieron la desviación media en cada caso.
- ¿Existen datos muy dispersos respecto a la media? ¿Se encuentran muy por debajo o por encima de la media?
- ¿Cuál de las gráficas es más homogénea, la de las mujeres o la de los hombres? ¿Antes o después de hacer ejercicio físico?

Comparen los resultados y las gráficas de todos los equipos y, con ayuda del profesor, escriban sus conclusiones en el cuaderno.

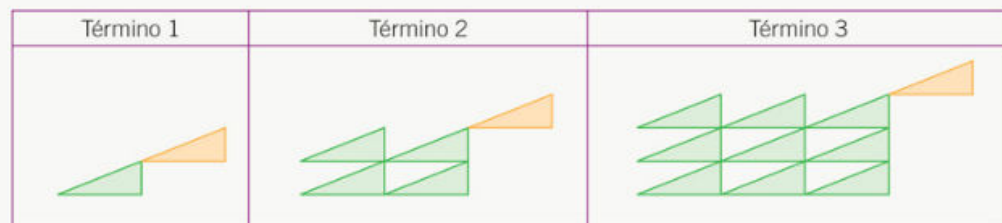
¿Cómo nos fue?

- Escribe con tus palabras para qué sirve la desviación media.
- ¿En qué situaciones se puede utilizar la desviación media?

Evaluación tipo PISA

UNIDAD: La sucesión

Observa la sucesión de figuras.



Pregunta 1: LA SUCESIÓN

Contexto: Escolar

Aprendizaje esperado: Utiliza en casos sencillos expresiones generales cuadráticas para definir el n ésimo término de una sucesión.

¿Cuál de las siguientes expresiones permite calcular el número de triángulos de cualquier término de la sucesión, donde n es el número de término?

- a) n^2 b) $n^2 + 1$ c) $n^2 + n$ d) $n(n + 1)$

Pregunta 2: LA SUCESIÓN

Contexto: Escolar

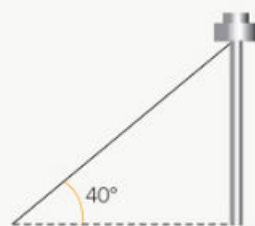
Aprendizaje esperado: Utiliza en casos sencillos expresiones generales cuadráticas para definir el n ésimo término de una sucesión.

¿Algún término de esa sucesión está formado por 225 triángulos? Justifica tu respuesta.

Respuesta: _____

UNIDAD: La antena

Se instalará una antena de 35 m de altura. Para sostenerla se colocarán seis cables tensados. Los cables formarán un ángulo de 40° con la distancia horizontal entre el punto que se fijan y la base de la antena y se sujetarán a 5 m de la parte más alta de la antena.



Pregunta 1: LA ANTENA

Contexto: Laboral

Aprendizaje esperado: Resuelve problemas que implican el uso de las razones trigonométricas seno, coseno y tangente.

Considera que la tangente de 40° es 0.84. ¿A qué distancia de la antena se deben colocar los cables?

- a) A 42.16 m b) A 36.14 m c) A 35.71 m d) A 32.16 m

© SANTILLANA

Pregunta 2: LA ANTENA

Contexto: Laboral

Aprendizaje esperado: Resuelve problemas que implican el uso de las razones trigonométricas seno, coseno y tangente.

Si se coloca otra antena, en condiciones similares a la anterior, pero de 40 m de alto, ¿qué cantidad de cable se necesita para sostenerla? Considera que el seno de un ángulo de 40° es 0.64.

Respuesta: _____

UNIDAD: Los clavos

Dos máquinas están calibradas para cortar trozos metálicos de 2.5 pulgadas con los que se elaboran clavos. Se tomó una muestra de 16 trozos de cada máquina para considerar la eficiencia en la calibración y se obtuvieron los siguientes resultados.

Medida de los trozos en pulgadas								
Máquina A	2.5	2.5	2.51	2.5	2.6	2.52	2.5	2.5
Máquina B	2.5	2.49	2.5	2.5	2.5	2.51	2.5	2.49

Medida de los trozos en pulgadas								
Máquina A	2.5	2.5	2.48	2.5	2.5	2.53	2.5	2.5
Máquina B	2.5	2.5	2.5	2.5	2.5	2.51	2.5	2.55

Pregunta 1: LOS CLAVOS

Contexto: Escolar

Aprendizaje esperado: Calcula y explica el significado del rango y la desviación media.

Escribe "verdadero" o "falso", según corresponda. Escribe las operaciones y justifica las respuestas.

La media de los datos de la máquina A es 2.53. _____

La desviación media de los datos de la máquina A es 0.5. _____

El rango de los datos de la máquina B es de 6 centésimas. _____

La media de los datos de la máquina B es 2.503. _____

Pregunta 2: LOS CLAVOS

Contexto: Laboral

Aprendizaje esperado: Calcula y explica el significado del rango y la desviación media.

El responsable de calibrar las máquinas afirmó que la A y la B son igualmente eficientes porque ambas produjeron 11 de 16 trozos de la medida exacta. ¿Es razonable la afirmación del encargado? Justifica tu respuesta.

© SANTILLANA

Bloque 5



Como resultado del estudio de este bloque temático se espera que:

- Resuelvas y plantees problemas que involucren ecuaciones lineales, sistemas de ecuaciones y ecuaciones de segundo grado.
- Resuelvas problemas que impliquen calcular el volumen de cilindros y conos o cualquiera de las variables que intervienen en las fórmulas que se utilicen. Anticipes cómo cambia el volumen al aumentar o disminuir alguna de las dimensiones.
- Leas y representes, gráfica y algebraicamente, relaciones lineales y cuadráticas.
- Resuelvas problemas que impliquen calcular la probabilidad de eventos complementarios, mutuamente excluyentes e independientes.

Cúpulas cónicas, Alberobello, Italia

En la región de Puglia, en Italia, se localiza el pueblo de Alberobello, famoso por sus casas construidas con piedra calcárea, de techo cónico, llamadas *trulli*, las más antiguas datan del siglo XV. Este lugar fue declarado patrimonio de la humanidad por la Unesco en 1996.

Contenido

Resolución de problemas que impliquen el uso de ecuaciones lineales, cuadráticas o sistemas de ecuaciones. Formulación de problemas a partir de una ecuación dada.

La dieta

Analiza el siguiente problema, después responde en tu cuaderno.

Mónica no sabía si estaba ingiriendo los suficientes nutrientes en su dieta, así que fue a ver al médico. Este le dijo que para estar saludable debía consumir a diario 550 mg de calcio y 1200 mg de vitamina A.

Mónica averiguó que la leche y el jugo de naranja son alimentos que contienen estos nutrientes y decidió incluirlos en su dieta. Encontró en un libro la información de la tabla.

Producto	Calcio (mg por cada onza)	Vitamina A (mg por cada onza)
Leche	38	56
Jugo de naranja	5	60

- Si toma un vaso de 5 onzas de cada líquido, ¿cuántos mg de calcio y de vitamina A consumirá?
- Supongan que con estos dos alimentos cubre su ingesta diaria de calcio y de vitamina A. ¿Cómo podrías determinar la cantidad de leche y de jugo que debe tomar Mónica para cubrir su ingesta diaria?
- ¿Qué tipo de ecuación, procedimiento o recurso usarías para responder lo anterior?
- ¿Cuántas onzas de leche y jugo de naranja debe tomar al día?
- ¿Por qué es importante definir las variables para resolver un problema?

Reúnete con otros compañeros y compara tus respuestas. Comenta acerca de cómo llegar a la solución del problema de Mónica.

A lo largo de la secuencia encontrarán apoyo para responder todas estas preguntas. Antes de continuar, lean la información del proyecto que realizarán.

Nuestro trabajo

En equipos, **plantarán ecuaciones** para resolver un problema y **elaborarán un cartel** en el que mostrarán los resultados de las ecuaciones que plantearon.

- Deberán incluir el desarrollo de cómo llegaron a la solución de las ecuaciones.
 - Al final presentarán su trabajo ante sus compañeros y ante el profesor.
- En el transcurso de la secuencia se les darán indicaciones e ideas para plantear sus ecuaciones.

¿Cuántas onzas?

Antes de trabajar en el cartel, haz las siguientes actividades con un compañero.

Retomen el problema de la dieta de Mónica y utilicen los datos que ella encontró.

- ¿Cómo se puede usar la información de la tabla para solucionar el problema? _____

- Asignen una letra para representar cada una de las variables que Mónica debe encontrar. Indiquen a qué corresponde cada una. _____

- Usen las variables que eligieron para escribir una ecuación que les permita determinar cuánta leche debe consumir Mónica cada día y anótenla. _____

- Con las mismas variables, escriban una ecuación que les permita encontrar cuánto jugo debe consumir Mónica cada día y anótenla. _____

- Comenten cómo se relacionan esas ecuaciones con el problema de Mónica y qué herramienta matemática pueden usar para resolverlas.
 - ¿Cuál es la solución de las ecuaciones que plantearon? _____

 - ¿Tiene sentido la solución que encontraron? ¿Por qué? _____

Para resolver problemas con ecuaciones es importante seguir estos pasos:

- Analizar con cuidado la situación planteada.
- Elegir las variables que se usarán y encontrar la relación entre ellas.
- Simbolizar el problema usando las variables en una ecuación, en un sistema de ecuaciones o con una función.

Resuelvan los siguientes problemas en equipo. Al terminar, discutan si el resultado tiene sentido y verifiquen la solución.

- Un bote para excursiones realiza un viaje de 120 km sobre las aguas de un río navegando a 15 km/h contra corriente.
 - Si de ida, navegando contra corriente, hace 1.5 veces más tiempo que de regreso, cuando viaja sobre aguas tranquilas, ¿cuál es la velocidad de la corriente?

- Encuentren la base y la altura de un triángulo cuya área es de 2 pies cuadrados y cuya base es 3 pies más larga que su altura.
Base = _____ Altura = _____

Comprueben la solución encontrada y compárenla con la de otros compañeros.

¿Cómo vamos?

Reúnanse con su equipo para trabajar en su cartel. Analicen la situación y hagan las siguientes actividades.

Manuel, un artesano, debe hacer 250 tortilleros iguales para una feria. Como la feria será en 15 semanas, Manuel está preocupado porque no sabe si terminará a tiempo. En la primera semana elaboró 9 tortilleros; en la siguiente, 11, y en la tercera, 13. Se dio cuenta de que conforme adquiere experiencia puede hacer más tortilleros por semana. ¿Cómo podrá saber si terminará a tiempo?

- Para su cartel, elaboren una tabla como la siguiente (pueden hacerla en una hoja de cálculo electrónica).

Núm. de semana	Núm. de tortilleros elaborados	Producción total de tortilleros
1	9	9
2	11	

- ¿Cuántos tortilleros más hizo Manuel en la semana 2 que en la 1? ¿Cuántos más hizo en la semana 3 que en la 2?
- ¿Cuántos tortilleros en total tiene hechos al final de la segunda semana? ¿Y al final de la tercera?
- Si esta tendencia de producción se mantiene, ¿cuántos tortilleros hará Manuel para la cuarta semana? ¿Cuántos tendrá al final de esa semana?
- Completen su tabla hasta la semana 15 para determinar si Manuel terminará a tiempo los tortilleros.
- ¿Qué observan en la tabla? ¿Manuel terminará a tiempo? ¿En qué semana ocurrirá? ¿Cuántos tortilleros elaboraría para el inicio de la feria?
- Con los datos de la segunda columna de la tabla (tortilleros elaborados por semana), planteen una expresión que indique el número de tortilleros que hace Manuel cada semana. Utilicen la letra k_n para el número de tortilleros que hizo Manuel en la semana n . Prueben su fórmula con distintos números de la tabla.
- Ahora, con los datos de la tercera columna, diseñen con una T el total de tortilleros que Manuel terminó al final de cada semana para plantear una expresión que relacione a T con el número de semanas que han transcurrido. Prueben su fórmula con distintos números de la tabla.
- Registren esta información y consérvenla para la presentación de su proyecto.

Espacio tecnológico

Si quieres desarrollar tu habilidad para resolver ecuaciones, te sugerimos consultar la página de Internet www.thatquiz.org/es-0/matematicas/algebra/ (consulta: 23 de diciembre de 2016, 11:47 horas)

En esta página se propone resolver distintos tipos de ecuaciones, tú eliges el nivel de dificultad y el tipo de ecuaciones con el que quieres trabajar.

Más ecuaciones

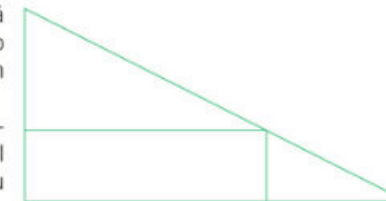
Resuelvan lo siguiente en equipos, hagan las operaciones en su cuaderno y anoten el resultado en las líneas.

Hasta este momento has utilizado las matemáticas para resolver varias situaciones.

- Reflexionen sobre todas esas situaciones: ¿qué es lo primero que deben identificar en ellas? ¿Por qué? ¿En qué tipo de situaciones aparecen las variables como incógnita? ¿En qué tipo de situación aparecen variables en relación funcional? ¿En cuáles de estas situaciones se utiliza una gráfica? ¿Para qué pueden utilizar la gráfica de una relación funcional?

Reflexionen y compartan lo que encontraron con todo el grupo y el profesor. Después, resuelvan los problemas en equipo.

- Un arquitecto hará una unidad habitacional que ocupará una superficie rectangular en un terreno triangular, como se muestra en la figura. El terreno triangular tiene 400 m de base y 200 m de altura.
 - Si la relación entre los lados de los triángulos resultantes es 3 a 1, ¿cuáles deben ser las dimensiones del edificio si la superficie de la sección transversal de su área mide 15 000 m²? _____



- En una distribuidora automotriz, el modelo "Veloz" cuesta \$200 000. A las empresas se les otorga un descuento si compran más de 54 unidades. Este descuento consiste en rebajar \$10 000 por cada auto adicional que adquieran, es decir, si adquieren dos automóviles adicionales, descuentan \$20 000 y así sucesivamente.
 - La compañía Ejecutivos, S. A. desea comprar 55 autos. ¿Cuánto le costará cada automóvil adicional? _____ ¿Y si compra 62 automóviles? _____
 - ¿Cuánto le costará cada automóvil, por arriba de 54, si compran x automóviles adicionales? _____
 - ¿Cuál es el ingreso de la distribuidora si vende 62 autos? _____
 - ¿Y si vende x autos por arriba de 54? _____
- Tracen en el cuaderno una gráfica que represente el ingreso del distribuidor contra el número de autos vendidos por arriba de 54.
 - ¿Qué función representa la gráfica? _____
 - ¿Para qué valores de x decrece? _____
 - ¿Qué significa para el distribuidor que la gráfica decrezca? _____

- Con base en la gráfica, encuentren el número de autos por arriba de 54 que le conviene vender al distribuidor para que su ingreso sea el máximo posible.
- Cuando los autos frenan, no se paran inmediatamente. La distancia que recorre un auto mientras frena se conoce como distancia de frenado. En el caso de un movimiento con aceleración constante, la distancia de frenado se puede encontrar mediante la relación $s = \frac{v^2}{2a}$. En la que s es la distancia, v es la velocidad y a es la aceleración.

- ¿Cuál es la distancia de frenado de un auto que viaja a 60 km/h? _____
 - ¿Cuál es la distancia de frenado de un auto que viaja a 80 km/h? _____
 - ¿Qué distancia se necesita para frenar si el auto va al doble de velocidad? _____
 - ¿Por qué es importante esta relación? Justifica tu respuesta. _____
- Un objeto se deja caer verticalmente desde un edificio (cae con aceleración constante). Si designamos h a la altura del piso en que se encuentra el objeto y t los segundos desde que se soltó, la expresión que relaciona h con t es $h = a + bt^2$. En esa expresión, a y b son constantes.
- Si después de un segundo, el objeto está 60 m sobre el suelo y después de dos segundos se encuentra 44 m sobre el suelo, ¿cuánto valen las constantes a y b ? _____
 - ¿Qué altura tiene el edificio? _____
- A continuación se presenta una ecuación lineal, una ecuación cuadrática y un sistema de ecuaciones. Plantea un problema para cada caso y resuélvelo.
- $x + y = 60$ $16.70x + 23.25y = 900$: _____
 - $x^2 + 2x - 3(x - 1) = 28$: _____
 - $2x + 20 = 78$: _____

Intercambien sus problemas con los de otros compañeros para verificar que utilizaron las expresiones correspondientes y válidenlos en grupo.

En cada uno de los problemas de la secuencia identifica con una F aquellos en los que se planteó una relación funcional; con una C aquellos en los que resolvió una ecuación cuadrática; con L aquellos en los que se desarrolló una ecuación lineal, y con S aquellos en los que se requiere un sistema de ecuaciones.

¿Cómo vamos?

Reúnete con tu equipo para terminar el cartel.

- ¿Qué tipo de sucesión se genera con el número de tortilleros que hace por semana?
- ¿Qué tipo de sucesión se genera con el número total de tortilleros al final de cada semana?
- Sustituyan el total de tortilleros que debe hacer Manuel en la expresión que plantearon. Ahora tienen una ecuación. ¿De qué tipo es?
- Resuelvan la ecuación para determinar el número de semanas que tardará Manuel para completar los 250 tortilleros. ¿Los tendrá listos a tiempo?
- ¿Cuánto tiempo tardaría si tuviera que hacer 300 tortilleros?
- Hagan su cartel con la información que han recopilado en el proyecto.

Tareas

Resuelve los problemas. Realiza las operaciones en tu cuaderno.

- Un editor quiere producir un libro. Tiene costos fijos (revisión, edición, tipografía, renta, etc.) que suman \$320 000.00, y costos que dependen de la cantidad de libros que produzca (impresión, comisiones por ventas, etc.), los cuales ascienden a \$31.25 por libro.
 - De acuerdo con un estudio de mercado, cada libro se puede vender en \$43.75. ¿Cuántos libros se deben vender para alcanzar el punto de equilibrio, es decir, para que los ingresos sean iguales que los costos?
- Una avioneta necesita alcanzar una velocidad de 100 km/h para despegar, y puede acelerar a 1.8 m/s^2 .
 - ¿Cuánto debe medir la pista?
- En una fábrica elaboran salchichas y salchichones en sus plantas A y B . En la tabla se indica la producción de cada embutido por hora en cada planta.

Planta	Salchichas	Salchichones
A	800	800
B	500	600

 - ¿Cuántas horas debe trabajar en cada planta para entregar un pedido de 65 500 salchichas y 76 500 salchichones?
- Francisco leyó en una revista de divulgación que el número de millones de clientes de una compañía de teléfonos celulares en Estados Unidos de América (de 1985 a 1990) se podía encontrar con la ecuación $s = 0.2t^2 - 2t + 5.3$, donde $t = 5$ representa el año 1985.
 - ¿En qué año la compañía llegó a tener 2.1 millones de suscriptores?

Presentación de nuestro trabajo

Coloquen su cartel en la pared y lean al grupo cómo llegaron a la solución de las ecuaciones.

- ¿Cómo fue su explicación respecto de la de sus compañeros? ¿Cuál fue más clara?
- ¿Qué tipo de ecuaciones utilizaron para resolver el problema del proyecto?
- ¿Todos los equipos utilizaron el mismo tipo de ecuaciones?

Discutan las dificultades; comenten cómo las resolvieron y si aún hay dudas, compártanlas en grupo y con apoyo del docente lleguen a una conclusión.

¿Cómo nos fue?

- ¿En algunos problemas de la secuencia utilizaste dos literales? ¿Por qué?
- ¿Qué tan difícil fue resolver los problemas? ¿Cuáles te resultaron más difíciles?
- Explica cómo determinar si un problema se resuelve con una ecuación lineal o con una ecuación cuadrática.

Cortes de un cilindro y un cono

Contenido

Análisis de las secciones que se obtienen al realizar cortes a un cilindro o a un cono recto. Cálculo de las medidas de los radios de los círculos que se obtienen al hacer cortes paralelos en un cono recto.

Las torres de Hanoi

Reúnete con un compañero, lean la situación y respondan.



Este antiguo juego matemático es conocido en todo el mundo. El número de movimientos para resolverlo crece exponencialmente conforme se aumenta el número de discos en cada torre.

El juego torres de Hanoi consiste en pasar todos los discos de un poste a otro, moviendo solamente uno a la vez, y nunca colocando un disco mayor sobre uno menor.

- ¿De qué manera podrían construir este juego a partir de un cilindro? Expliquen cómo harían los cortes para conseguir ocho discos de distinto radio. _____
- ¿Qué ventajas o desventajas habría si construyeran los discos del juego a partir de un cono? Expliquen cómo harían los cortes. _____
- ¿Qué datos necesitan tener a la mano para obtener discos del mismo grosor y cuyo diámetro vaya aumentando de manera proporcional? _____

Más adelante retomarás esta situación. Por ahora, reúnete con un compañero y lean el texto para conocer en qué consiste el proyecto de esta secuencia, la forma de trabajo y los materiales que necesitarán.

Nuestro trabajo

En este proyecto, en parejas, elaborarán un **informe** sobre las características de las secciones que se forman al hacer cortes en esferas, cilindros y conos. En su trabajo, deberán incluir modelos para ejemplificar y demostrar sus conclusiones; pueden elaborarlos en plastilina, cartulina u otro material.

Desarrollarán su trabajo a lo largo de la secuencia. En la sección “¿Cómo vamos?” encontrarán consejos e ideas de actividades que pueden realizar para comprobar sus ideas sobre el tema y los modelos para presentarlo.

Cortes en un cilindro

Haz esta actividad con un compañero. Con plastilina, construyan dos cilindros que midan alrededor de 10 cm de altura y 5 cm de diámetro y hagan lo siguiente.

- A un cilindro, háganle cortes paralelos a la base, con una separación de 1 cm, aproximadamente. ¿Qué figuras se obtienen en las bases de los cortes? Descríbanlas y mencionen si todas son iguales. _____
- Al otro cilindro, háganle tres cortes **oblicuos** a la base, procurando que las secciones tengan igual grosor. ¿Qué figuras se obtienen? Mencionen sus características y si todas son iguales. _____
- En el cilindro anterior, hagan otros tres cortes oblicuos, pero cambiando el ángulo de inclinación. Describan cómo son las secciones en comparación con las anteriores. _____

En grupo, discutan lo siguiente. Anota las conclusiones en tu cuaderno.

- ¿Qué características tienen las secciones obtenidas al hacer cortes al cilindro?
- ¿Las figuras que obtuvieron en los casos anteriores son todas las que se pueden lograr al hacer cortes al cilindro? ¿Qué otras pueden obtenerse?

¿Cómo vamos?

Reúnete con tu compañero de equipo para trabajar en su proyecto.

- Busquen objetos con forma cilíndrica (latas, velas). Reflexionen: ¿pueden descubrir todas las posibles figuras que se generan al hacerles distintos cortes? ¿Serán todas iguales? ¿En qué se parecen y en qué son diferentes? Escriban sus respuestas en el borrador de su informe.
- Al presentar su trabajo deberán usar modelos para explicar qué secciones se forman. Hagan sus modelos de cilindros y practiquen los cortes.

Cortes en el cono

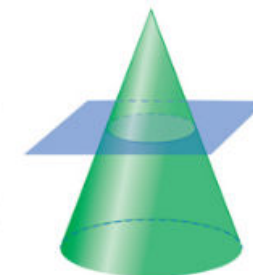
Hagan esta actividad en equipos. Con plastilina, construyan cuatro conos con una altura aproximada de 8 cm y cuya base mida 6 cm de radio.

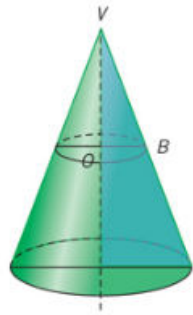
- Tomen un cono y háganle tres cortes horizontales paralelos a la base y equidistantes entre sí, de tal manera que la distancia vertical entre cada corte sea de 2 cm. Observen el contorno de los cortes. Describan las figuras geométricas que resultaron.



Glosario

oblicuo. Dicho de un plano o de una línea: que corta a otro u otra, formando un ángulo que no es recto.





- Apliquen el teorema de Tales para calcular las medidas de los radios de las figuras obtenidas y anótenlas en la tabla.

radio = OB	altura = OV	generatriz = VB
	2 cm	
	4 cm	
	6 cm	
6 cm	8 cm	



- Calculen la medida de las generatrices VB para cada uno de los cortes y anoten los resultados en la tabla. ¿Qué teorema aplicaron para calcular VB ? _____

- Tomen otro cono de plastilina y háganle cortes oblicuos a la base desde un lado del cono hasta el otro, como se aprecia en la imagen de la izquierda.

- ¿Qué figuras geométricas se observan en los cortes? _____

- Hagan algunos cortes con mayor o con menor inclinación. ¿Qué sucede? _____

- ¿En qué se parecen y en qué son diferentes las figuras obtenidas en los cortes anteriores? _____

- En otro cono, hagan cortes de forma oblicua, pero empezando por un lado del cono, atravesando su altura y cortando la base (como en la imagen).

- Hagan varios cortes iguales, modificando levemente el ángulo. ¿En qué se parecen y en qué son diferentes sus contornos? _____

- Tomen el último cono de plastilina: el corte debe hacerse en el mismo lado del cono, desde la zona curva hasta llegar a la base (como en la imagen).

- Observen que las curvas generadas así son diferentes de las que se obtuvieron antes. Comenten sus características.

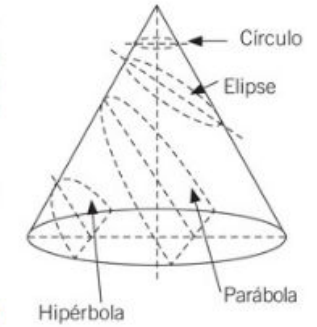
Tareas

Investiga y anota tus respuestas en tu cuaderno.

1. ¿Qué nombre recibe cada una de las curvas que se forman al hacer los cortes descritos anteriormente en un cono?
2. ¿Cuál de las curvas anteriores puede representar la trayectoria del recorrido de un planeta alrededor del Sol?
3. ¿Cuál de las curvas anteriores representa la trayectoria de un cometa?
4. ¿Cuál de las curvas anteriores representa la trayectoria de una pelota que es lanzada al aire formando un ángulo con la horizontal?

© SANTILLANA

En la figura de al lado puedes ver todas las curvas que trazaron en las actividades anteriores: cada una genera secciones planas con diferentes nombres. A todas estas curvas se les llama **secciones cónicas**, y son aquellas obtenidas por la intersección de un plano y de un cono. Tienen características que estudiarás con mucho más detalle en cursos superiores de Matemáticas.



Compartan sus respuestas de la tarea, válidenlas en sesión grupal y concluyan sobre lo que aprendieron acerca de las secciones cónicas.

¿Cómo vamos?

Retomen sus observaciones acerca de los cortes en un cono e inclúyanlas en su informe.

- Elaboren los modelos de conos que ocuparán para presentar su trabajo. También hagan la versión final de su informe.
- Pónganse de acuerdo para elaborar su presentación para el grupo. Determinen qué cortes diferentes harán en cada modelo y cuándo las figuras obtenidas son congruentes y cuándo son diferentes.

Reúnete con el compañero con el que trabajaste al inicio de esta secuencia. Retomen el problema inicial y traten de resolverlo aplicando lo que han visto hasta ahora. Respondan lo siguiente en su cuaderno.

- Si el disco superior de la torre tiene un diámetro de 4 cm y se quiere que el octavo disco tenga un diámetro de 10 cm y que los puntos extremos correspondientes de todos los diámetros formen líneas rectas, ¿cuál será la medida de los diámetros de los discos intermedios?
- ¿Cómo se irán modificando los radios de los discos obtenidos al hacer cortes paralelos a un cono?
- Calcula la pendiente de la recta que forman los puntos extremos de los diámetros de los discos, es decir, de la generatriz del cono del cual se pudieron haber cortado los discos, si la altura de cada disco es 1.5 cm.
- Escriban una ecuación que relacione el número de disco (x) con su diámetro (y), tomando como disco 1 el superior; indiquen qué tipo de ecuación es.

Presentación de nuestro trabajo

Hagan su presentación ante el grupo y entreguen su informe al profesor.

- Además de comentar sus conclusiones sobre las secciones obtenidas hagan las demostraciones, marcando los cortes en sus modelos.

¿Cómo nos fue?

Comenta con tus compañeros y el profesor.

- ¿Cuál fue la mayor dificultad a la que te enfrentaste al resolver las actividades propuestas en la secuencia? ¿Cómo la resolviste?
- ¿Qué secciones pueden obtenerse al hacer cortes a un cono?
- Escribe un párrafo en el que expliques cómo se generan diferentes curvas al hacer cortes en cilindros y conos.

Espacio tecnológico

En la siguiente página www.youtube.com/watch?v=TN6mudrldbk podrás ver un breve video en el que se muestran las diferentes secciones curvas que resultan de cortar un cono recto variando el ángulo de inclinación del corte.
(consulta: 23 de diciembre de 2016, 11:48 horas)

Cierre



Las formas cilíndricas y cónicas se aprovechan en el diseño de muchos objetos de uso cotidiano.

Glosario

experimento. Secuencia de procedimientos destinados a descubrir, comprobar o demostrar determinados fenómenos, fórmulas o principios científicos.

Contenido

Construcción de las fórmulas para calcular el volumen de cilindros y conos tomando como referencia las fórmulas de prismas y pirámides.

Cilindros y conos

Lee el texto y contesta las preguntas en el cuaderno. Luego, compara tus respuestas con las de otros compañeros.

Seguramente has observado recipientes, objetos e incluso edificaciones con forma cónica o cilíndrica. ¿Crees que sus características los hacen mejores que otras formas geométricas? Sin duda, alguna ventaja deben tener para que tantos diseñadores industriales y arquitectos los elijan en diversos tipos de proyectos.

- ¿Existirá alguna relación entre los volúmenes del cilindro y del cono? Argumenta tu respuesta.
- ¿Y entre el volumen de los conos y cilindros, y el de otros prismas y pirámides? Explica.

En esta secuencia harás ejercicios que te permitirán verificar tus respuestas de esta actividad. Por ahora, forma un equipo de tres o cuatro integrantes y lee la información sobre el proyecto.

Nuestro trabajo

En equipos, diseñarán un **experimento** que les permita comprobar si existe alguna relación entre los volúmenes de prismas, pirámides, cilindros y conos y elaborarán un informe con sus resultados.

Como primer paso, construirán un cilindro y cinco prismas: triangular (con triángulo equilátero de base), cuadrangular, pentagonal, hexagonal y heptagonal; así como un cono y cinco pirámides: triangular (con triángulo equilátero de base), cuadrangular, pentagonal, hexagonal y heptagonal. Todos los sólidos deben tener la misma altura, y su base quedará inscrita en un círculo de igual tamaño (como se muestra); la base del cilindro y del cono será un círculo igual a aquel en el que inscribirán las figuras.



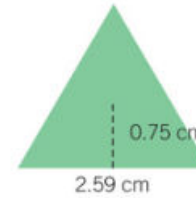
Les sugerimos que comiencen trazando los desarrollos planos en papel, para después hacerlos en material resistente (cartón o cartoncillo). Realizarán su proyecto a lo largo de esta secuencia, y en la sección "¿Cómo vamos?" encontrarán más detalles.

© SANTILLANA

El área de los polígonos y el volumen de los prismas

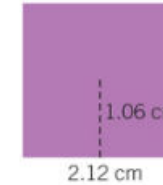
Realiza la siguiente actividad individualmente.

- Observa los polígonos y el círculo, escribe la fórmula para encontrar el área de cada uno y calcúlala. Después contesta las preguntas.



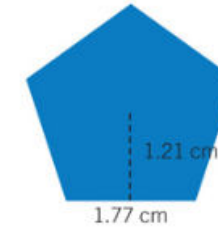
Fórmula: _____

Área: _____



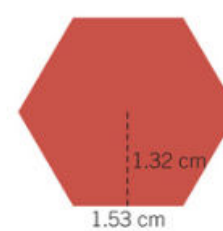
Fórmula: _____

Área: _____



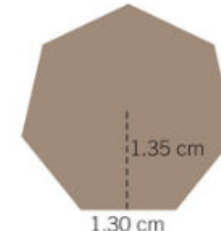
Fórmula: _____

Área: _____



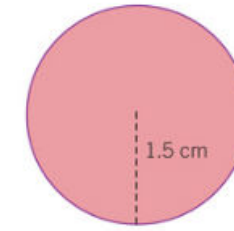
Fórmula: _____

Área: _____



Fórmula: _____

Área: _____

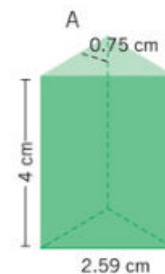


Fórmula: _____

Área: _____

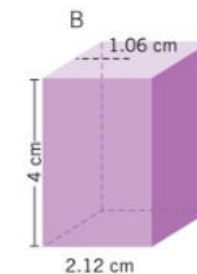
- Si los polígonos anteriores se inscriben en un círculo, ¿cómo será el área del polígono cada vez que aumenta su número de lados, en comparación con el área del círculo? _____
- ¿Qué relación hay entre el apotema de los polígonos y el radio del círculo? _____

- Una vez que has recordado las fórmulas para encontrar el área de algunos polígonos y del círculo, escribe las fórmulas para encontrar el volumen de los prismas que se muestran a continuación y calcúlalo.



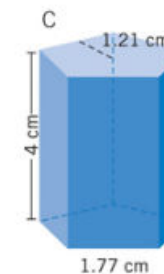
Fórmula: _____

Volumen: _____



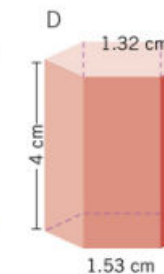
Fórmula: _____

Volumen: _____



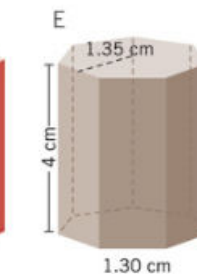
Fórmula: _____

Volumen: _____



Fórmula: _____

Volumen: _____



Fórmula: _____

Volumen: _____

© SANTILLANA

Reúnete con un compañero, hagan lo que se indica y respondan.

- Revisen los volúmenes que obtuvieron en la actividad anterior y compárenlos así: volumen del prisma triangular (A) con el cuadrangular (B); volumen del prisma cuadrangular (B), con el pentagonal (C), y volumen del pentagonal (C) con el hexagonal (D). Anoten cómo son entre sí y sus observaciones. _____

- Observen el prisma heptagonal (E). Consideren que se tiene un cilindro con la misma altura que este, y cuya base es un círculo en el que puede inscribirse el heptágono base de dicho prisma. ¿Cómo será el volumen del cilindro si se compara con el volumen del prisma heptagonal? _____

- A partir de lo que han visto hasta ahora, describan cómo se calcula el volumen del cilindro. _____

Comparen sus respuestas con las de otras parejas y argumentenlas.

¿Cómo vamos?

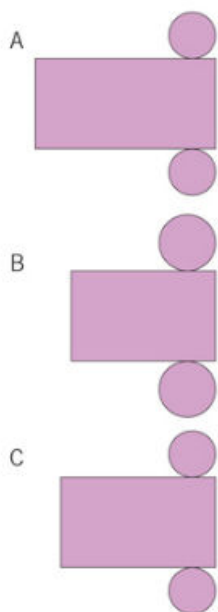
Reúnete con tu equipo y trabajen en su proyecto.

- Anoten las medidas que asignen a los desarrollos planos; luego, armen los cuerpos, pero sin pegarlos, y revisen de nuevo las medidas.
- Discutan si hay alguna relación entre el volumen de los prismas y el de las pirámides de igual base, así como entre el volumen del cono y del cilindro, y cómo pueden usar los cuerpos para verificarlo. Establezcan una serie de pasos para seguir en su experimento y escríbanlos, pues los incluirán en su informe.

El volumen del cilindro

Hagan la siguiente actividad en equipos.

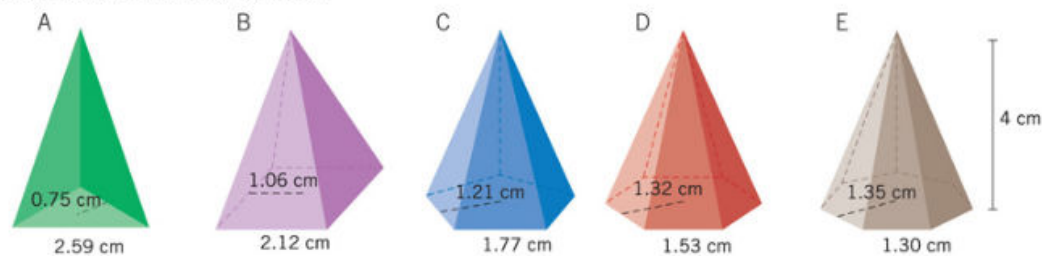
- En diferentes hojas, tracen a escala los desarrollos planos de al lado, midan las dimensiones de los rectángulos y sus correspondientes círculos y determinen si con esas medidas se puede construir un cilindro.
- Para calcular el volumen de un prisma, hay que multiplicar el área de la base por la altura, teniendo en cuenta esto, respondan en el cuaderno.
 - ¿Qué forma tiene la base del cilindro y cómo se calcula su área?
 - Escriban la fórmula para calcular el volumen de un cilindro, y calculen el volumen del cilindro que determinaron en la actividad anterior.
 - ¿Qué pasa con el volumen si el área de la base crece, pero la altura se mantiene constante? ¿Qué sucede si la altura aumenta o disminuye, pero el área de la base se mantiene constante?



El volumen de las pirámides y del cono

Resuelve de forma individual.

- Al igual que trabajaste con los prismas, ahora escribe las fórmulas para encontrar el volumen de las pirámides y calcúlalo.



Fórmula: _____
 Volumen: _____

En parejas, revisen sus respuestas de la actividad anterior y hagan lo siguiente.

- Comparen el volumen de las pirámides así: el de la pirámide triangular (A) con el volumen de la cuadrangular (B); el de la pirámide cuadrangular (B) con el volumen de la pentagonal (C) y el de la pentagonal (C) con el volumen de la hexagonal (D). ¿Cómo son los volúmenes entre sí? Anoten sus observaciones.

- Observen la pirámide heptagonal (E). Si se tiene un cono con la misma altura que esta, y cuya base es un círculo en el que puede inscribirse el heptágono de dicha pirámide, ¿cómo creen que será el volumen del cono, si se compara con el de la pirámide? _____

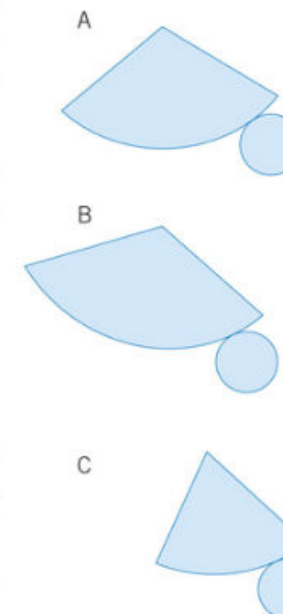
- Según lo que han visto, describan cómo se calcula el volumen de un cono.

Trabajen esta actividad en equipos.

- Tracen en diferentes hojas los desarrollos planos indicados al lado; determinen con cuál se puede construir un cono y armenlo.
 - Escriban la fórmula para calcular el volumen de un cono y calculen el volumen del que armaron. _____

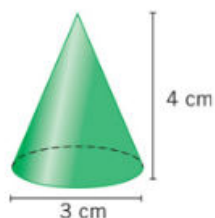
En grupo, comparen lo que plantearon para calcular el volumen de un cono tanto en esta actividad como en la anterior. Para concluir, respondan:

- ¿Qué pasará con el volumen del cono si el área de su base crece pero la altura se mantiene constante? ¿Y si la altura del cono aumenta o disminuye pero el área de la base se mantiene constante?



El volumen del cilindro y del cono

Al igual que trabajaste con los prismas y las pirámides de las páginas anteriores, ahora escribe las fórmulas para calcular el volumen del cilindro y del cono que se muestran a continuación y calcúlalos.



Fórmula: _____

Volumen: _____



Fórmula: _____

Volumen: _____

Trabajen esta actividad en parejas; comparen los datos que obtuvieron para el volumen del cono y del cilindro y contesten.

- ¿Qué relación observan entre la fórmula del cilindro y la del cono, si su base y altura son iguales? _____
- ¿Es correcta esta afirmación? Si el cilindro y el cono tienen igual base e igual altura, el volumen del cono es un tercio del volumen del cilindro. Argumenten por qué. _____
- Revisen la actividad de la página 236, y corrijan sus respuestas, de ser necesario.

¿Cómo vamos?

Reúnete con tu equipo para trabajar en su proyecto.

- Según lo que han visto, ¿cómo es el volumen de los prismas, comparado con el del cilindro? ¿Qué han observado en cuanto al volumen de las pirámides comparado con el del cono? ¿Qué materiales usarían para rellenar sus figuras y comparar los volúmenes?
- Usen el cilindro y el cono y comprueben lo aprendido en la actividad anterior.
- Definan los pasos de su experimento y llévenlo a cabo. Luego, hagan su informe; deben incluir el objetivo del experimento; los pasos que siguieron, los resultados y las conclusiones que pueden obtenerse a partir de ellos. En clase repetirán su experimento, así que lleven todos los materiales.

Tareas

Resuelve las actividades y responde en el cuaderno.

1. Construye un cono cuyo desarrollo plano sea un sector circular de radio de 5 cm y con ángulo central de 180° ; luego, construye un cilindro con igual base y altura que el cono.
2. Construye un cono cuyo desarrollo plano sea un sector circular de radio de 5 cm y con ángulo central de 120° ; luego, construye un cilindro con igual base y altura que el cono.
3. Obtén el volumen de los conos y cilindros y compáralos. ¿Cuál es tu conclusión?

© SANTILLANA

La luz del cono

Lee la situación y responde.

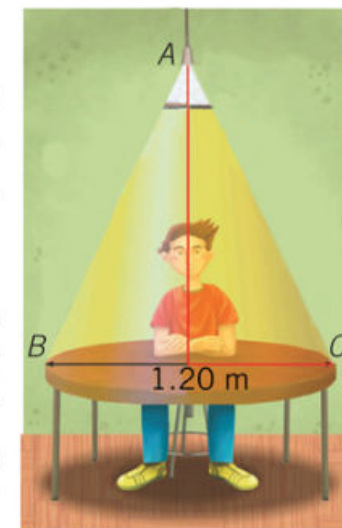
En el techo hay una lámpara con forma de cono que ilumina la mesa circular. Esta tiene un diámetro de 1.20 m y la lámpara forma un ángulo de 60° .

- ¿A qué altura sobre la mesa debe colocarse la lámpara para que la ilumine por completo? _____

Ahora, hagan en grupo esta actividad.

Con la supervisión del profesor, construyan un cono con cartulina, de manera que sirva de pantalla para un foco que ilumine la superficie del escritorio, como se muestra en la figura. En cartoncillo, tracen un círculo de 1.20 m de diámetro y pónganlo sobre el escritorio para simular la mesa de la imagen. Deberán construir un mecanismo, que puede ser con armellas clavadas en el techo y un lazo, para poder subir o bajar la lámpara y medir su altura sobre la mesa. Modifiquen la altura de la lámpara y midan el diámetro del círculo iluminado que se forma, repitiendo el procedimiento hasta llegar a la respuesta. Hagan una tabla indicando los resultados de sus diferentes intentos.

- Observen el dibujo. Si el ángulo A mide 60° y los lados AB y AC son iguales, ¿qué tipo de triángulo es el triángulo ABC ? _____
- Tracen la altura del cono. ¿Cuánto mide el radio de la mesa? _____



Presentación de nuestro trabajo

Entreguen al profesor su informe y sigan sus indicaciones para presentar su experimento ante el grupo.

- Hagan las demostraciones de sus experimentos: llenen los diferentes cuerpos geométricos con azúcar o arena para demostrar cuántas veces cabe el contenido del cono en el cilindro de igual altura y base. Expliquen también cómo dedujeron las fórmulas de volumen de cilindros y conos a partir de las fórmulas de volumen de prismas y pirámides.
- Discutan en clase las conclusiones de todos los equipos.

Conserve su trabajo e intégrenlo en su archivo de evidencias.

¿Cómo nos fue?

- ¿Cuál fue la mayor dificultad a la que te enfrentaste al resolver las actividades propuestas? ¿Cómo la resolviste?
- ¿Comprendiste la relación que hay entre el volumen de un cono y el de un cilindro que tienen la misma altura y la misma base?
- ¿Qué aplicaciones tienen en la vida diaria los conceptos aprendidos?

© SANTILLANA

Contenido

Estimación y cálculo del volumen de cilindros y conos o de cualquiera de las variables implicadas en las fórmulas.

Los helados

Reúnanse con un compañero, lean el texto y respondan los planteamientos en el cuaderno. En todos los casos, describan cómo llegaron a su respuesta.



En una tienda se venden helados en barquillos y en vasos cilíndricos. El barquillo tiene forma de cono, con una altura de 12 cm y un diámetro de 6 cm.

- Si el barquillo se llena de helado, ¿cuál será el volumen del helado que tiene dentro?
- Si, además, al cono se le agrega una semiesfera de helado de 57 cm^3 de volumen, ¿cuál será el volumen total de helado que tiene?
- ¿Qué dimensiones debe tener un envase cilíndrico A que contendrá el mismo volumen de helado que el cono, si se desea que la altura y el diámetro de este envase A tengan la misma medida? Tengan en cuenta que el helado quedará compactado dentro del vaso para llenarlo totalmente.
- ¿Cabrá el mismo volumen de helado en un envase cilíndrico B , cuyo diámetro midiera el doble y cuya altura midiera la mitad del envase cilíndrico A ? Explica.
- Si un envase cilíndrico C midiera la mitad de diámetro y el doble de altura que el envase cilíndrico A , ¿cabría en ambos cilindros el mismo volumen de helado?

El cálculo de volúmenes puede aplicarse en situaciones tan sencillas como determinar si la cantidad de helado en un recipiente cónico y uno cilíndrico será la misma o diferente.

Comparen con otros compañeros sus respuestas, así como los procedimientos que siguieron para obtenerlas.

Más adelante regresarán a esta situación. Ahora, lean el texto en el que se describe el proyecto de esta secuencia, la forma de trabajo y los materiales que necesitarán.

Nuestro trabajo

Reúnete con un compañero. Para este proyecto, **construirán** en cartulina **diferentes conos y cilindros** que cumplan con las características que se les indiquen; más adelante encontrarán instrucciones al respecto.

Desarrollarán su proyecto a lo largo de esta secuencia; al concluirla, presentarán sus trabajos y explicarán al grupo el procedimiento que siguieron para obtener los valores que les permitieron construirlos.

© SANTILLANA

El transporte de agua

Antes de empezar con tu proyecto, veamos algunos problemas del cálculo de volúmenes de cilindros. En la secuencia anterior estudiaste las fórmulas para calcular el volumen de cilindros y conos, ahora veremos algunas de sus aplicaciones.

Trabajen en equipos para resolver los siguientes problemas.

Una pipa cilíndrica que mide 4 m de largo y tiene de radio 80 cm está completamente llena de agua. El líquido será vaciado en tinacos cilíndricos que tienen un diámetro de 1.10 m y una altura de 1.40 m.

Respondan lo siguiente (antes de iniciar sus cálculos, repasen la equivalencia entre unidades de volumen y capacidad, por ejemplo, $1 \text{ dm}^3 = 1 \text{ L}$).

- ¿Cuál es el volumen de la pipa? _____
- ¿Cuál es la capacidad de la pipa? _____
- ¿Cuál es el volumen y la capacidad de los tinacos? _____
- ¿Para cuántos tinacos alcanzará el agua de la pipa y con cuánta agua se quedará? _____

Comparen sus respuestas con las de sus compañeros.

Consigan una lata de refresco y midan el diámetro de la base y su altura. Supongan que se trata de un cilindro perfecto, calculen su volumen y su superficie total. (Recuerden que otra equivalencia entre unidades de volumen y capacidad es: $1 \text{ cm}^3 = 1 \text{ mL}$). Discutan lo siguiente y anoten sus respuestas en el cuaderno.

- ¿Es posible diseñar otra lata de refresco que tenga el mismo volumen que la lata anterior, pero cuya superficie tenga un área diferente? Indiquen un procedimiento que podrían seguir para verificarlo.

Para corroborar su respuesta, primero recordemos algunos conocimientos: como saben, el **volumen de un cilindro** se encuentra al multiplicar el área de su base (πr^2) por su altura (h):

$$\text{Volumen} = \pi r^2 h$$

- Expliquen cómo podemos calcular la medida de la altura de la lata, si conocemos el volumen y el radio del cilindro. _____

Comenten sus respuestas con sus compañeros.

Otro aspecto que debemos tener en cuenta para responder el planteamiento es el área de la lata. Recuerda que si **desdoblamos un cilindro**, con su cara lateral se forma un **rectángulo** cuya base tiene la misma longitud que la **circunferencia del círculo**, que es la base del cilindro. De esto se deduce que para calcular el área lateral del cilindro se puede usar la fórmula:

$$\text{Área lateral} = 2\pi rh$$

Ahora retomemos el caso de las latas para verificar si estas pueden tener el mismo volumen, pero diferente superficie.

- Si el volumen de la lata es el mismo y el radio aumenta, ¿qué ocurrirá necesariamente con la altura? _____

© SANTILLANA

- Completen la tabla. En la segunda columna escriban diferentes valores para el radio y calculen la altura para que el volumen sea de 350 cm^3 . Con base en esto, encuentren el área de la base, el área lateral y el área total.

Volumen del cilindro	Radio de la base	Altura del cilindro	Área de la base	Área lateral	Área total
350 cm^3	1 cm				
350 cm^3	2 cm				
350 cm^3					
350 cm^3					

- Analicen los datos y respondan.
 - ¿Sería posible diseñar una lata con el mismo volumen y menos superficie que las latas que se venden normalmente en las tiendas? Expliquen. _____
 - ¿Por qué creen que las latas de refresco usualmente tienen esas dimensiones y no otras? _____
 - ¿Qué otros factores se tendrán en cuenta al decidir qué dimensiones tienen las latas de refresco? _____

Revisen en grupo sus resultados. Expongan la respuesta que dieron al principio al planteamiento de las latas de refresco y mencionen cómo es aquella en relación con la que obtuvieron luego de calcular los volúmenes; corrijanla de ser necesario.

Otros problemas

Trabajen en parejas para resolver estos problemas. Anoten en el cuaderno los procedimientos que siguieron para resolverlos y las respuestas.

- Cuatro cubos de hielo que miden 4 cm en cada uno de sus lados se dejan derretir dentro de un vaso cilíndrico vacío que tiene un radio de 3 cm.
 - ¿Qué volumen tiene cada cubo?
 - ¿Qué volumen de agua tendrá el vaso?
 - ¿Qué altura tendrá el agua dentro del vaso, una vez que los hielos se hayan derretido por completo?
- Observa la fotografía de un estacionamiento de autos en Wolfsburg, Alemania. En cada uno de los 40 niveles del edificio caben 20 autos. Suponiendo que el edificio es cilíndrico y que su circunferencia está dividida en 20 secciones de 2.50 m de ancho cada una, ¿cuánto mide la circunferencia del edificio? ¿Cuánto mide su diámetro y su radio? Si cada cajón de estacionamiento tiene una altura de 2 metros, calcula el volumen del edificio.

Reúnanse con otra pareja y comparen los pasos que siguieron para resolver los problemas. Comenten si algún procedimiento les parece más adecuado.

¿Cómo vamos?

Reúnete con tu compañero de proyecto para continuar su trabajo.

- Los cuerpos que deberán construir tendrán estas medidas: un cilindro con un volumen de 577 cm^3 y una altura de 15 cm; un cilindro con un volumen de $2\,034.7 \text{ cm}^3$ y un radio de 6 cm; un cono con un volumen de 565.2 cm^3 y una altura de 15 cm, y otro cono con un radio de 2 cm y un volumen 37.68 cm^3 .
- Comenten entre ustedes qué medidas les faltan para trazar los desarrollos planos y cómo pueden obtenerlas a partir de los datos con los que cuentan.

La hoja de papel

Resuelvan los siguientes problemas en equipo. No olviden tomar nota de sus operaciones y procedimientos.

- ¿Cuál será el volumen del cilindro que se forma al enrollar una hoja de papel tamaño carta, de manera que el ancho de la hoja corresponda a la altura del cilindro?
 - Si se enrolla la hoja de papel de forma que el largo corresponda ahora a la altura del cilindro, ¿se obtendrá un cilindro con el mismo volumen que el anterior? Si no es así, ¿cuál creen que tendrá mayor volumen?
 - Midan las dimensiones de una hoja de papel tamaño carta y construyan los dos cilindros.
 - Calculen el volumen de cada cilindro y discutan con sus compañeros los resultados obtenidos. ¿Resultó lo que esperaban?

- Una pecera en forma de prisma rectangular mide 20 cm x 40 cm de base y 1 m de altura, esta llena de agua, la cual se vierte en otra pecera cilíndrica con un radio de 10 cm, de tal manera que el agua en ambas queda a la misma altura.



- ¿Cómo podemos calcular la altura h del agua que tendrán ambas peceras?
- ¿Cuál es el volumen de agua en la pecera que está llena?
- Observen los dibujos de las peceras una vez que el agua se ha vertido de una a otra. ¿Ahora, cuál es el volumen de agua de la pecera en forma de prisma? (Tomen en cuenta que como no conocen el valor de h , el resultado será una expresión algebraica).
- ¿Cuál es el volumen de agua en la pecera cilíndrica? (Aquí también obtendrán una expresión algebraica).
- ¿Cómo pueden construir una ecuación algebraica con los datos o expresiones obtenidas hasta ahora?
- Resuelvan la ecuación y encuentren el valor de h . Expliquen por qué h no es igual a 50 cm.



Reúnanse en sesión grupal; presenten las expresiones que obtuvieron y sométanlas a validación del grupo, con ayuda de su profesor. Hagan los ajustes que consideren adecuados.



Espacio tecnológico

Si deseas saber más sobre el cálculo de volúmenes de los cuerpos geométricos, te sugerimos consultar la siguiente página: www.disfrutalas-matematicas.com/geometria/cilindro.html (consulta: 23 de diciembre de 2016, 11:50 horas)

En ella encontrarás fórmulas para calcular el volumen y el área de la superficie del cilindro, del cono, y de otros cuerpos geométricos.

¿Conos o cilindros?

Resuelvan el siguiente problema en parejas.

- Un garrafón contiene 19 litros de agua. Se quiere verter en conos de papel que miden 8 cm de diámetro y 10 cm de altura.
 - ¿Cuál es la fórmula para calcular el volumen de un cono? _____
 - ¿Cuál es el volumen y la capacidad de cada cono? _____
 - ¿Cuántos conos se necesitarán para vaciar el garrafón de agua? _____
- Si en lugar de conos se usaran vasos cilíndricos que midieran 8 cm de diámetro y 8 cm de altura, ¿cuántos vasos se necesitarían? _____
- Consigan un cono de papel, de los que se usan para tomar agua de los garrafrones, y desdóblenlo. Estimen su superficie en cm^2 . _____
- Calculen la superficie de un vaso cilíndrico con las dimensiones dadas anteriormente. _____
- Tomando en cuenta la cantidad de material que se usa para hacer tanto los conos de papel como los vasos cilíndricos necesarios para vaciar un garrafón de agua, ¿qué tipo de recipiente conviene más si se quiere reducir la cantidad de material? _____

Discutan con sus compañeros sus respuestas y acuerden cuáles son correctas.

¿Cómo vamos?

- En las actividades anteriores han encontrado diversos valores a partir del volumen de conos y cilindros. ¿Cómo pueden aprovechar esto para su proyecto? ¿Tienen ya los valores necesarios para trazar todos los cuerpos? Si aún no los tienen, revisen el tema en el que hicieron desarrollos planos de conos y cilindros. Tomen nota de todo su trabajo, recuerden que deberán explicar ante el grupo cómo obtuvieron cada valor para construir los cuerpos.

Tareas

Resuelve los siguientes problemas en el cuaderno. En clase comenta tus resultados con los de tus compañeros.

1. Se construye una columna de monedas de \$10 de manera que el valor total de la columna sea de \$100. Encuentra el volumen y la superficie total del cilindro.
2. Se construye una columna de monedas de \$5 de manera que el valor total de la columna sea de \$100. Encuentra el volumen y la superficie total del cilindro.
3. Se construye una columna de monedas de \$1 de manera que el valor total de la columna sea de \$100. Encuentra el volumen y la superficie total del cilindro.
4. Compara los resultados obtenidos en las tres preguntas anteriores. ¿Qué columna tiene mayor volumen? ¿Cuál tiene mayor superficie total?
5. ¿Cuál es el diámetro de un cilindro que tiene un volumen de 502.4 cm^3 y 10 cm de altura?

© SANTILLANA

El depósito

Resuelve el siguiente problema en el cuaderno.

- José Luis quiere instalar en su bodega un silo (depósito) como la forma del que se muestra en la ilustración, pero no está seguro de que haya el espacio suficiente.
 - Sabe que el cilindro tiene un volumen de 17.6 m^3 y una altura de 4.20 m. ¿Cuál es su diámetro?
 - Si el cono tiene un volumen de 1.9 m^3 , ¿cuál es su altura?
 - ¿Cuál es la altura total del silo?
 - La bodega en donde se instalará el silo tiene una altura de 5.80 m. ¿Cabrá el silo, si entre la punta de este y el piso debe haber un espacio de 50 cm?

Compara tus respuestas con las de otro compañero y, con ayuda del profesor, corríjelas si es necesario.

Reúnete con el compañero con el que trabajaste al inicio de esta secuencia. Retomen el problema inicial y traten de resolverlo aplicando lo que han visto hasta ahora.

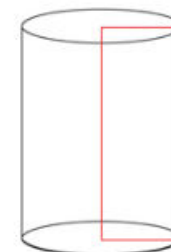
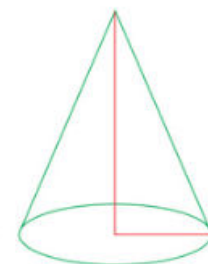
- ¿Encontraron el volumen total de helado en el cono?
- ¿Cuál es la fórmula para encontrar el volumen de un cilindro?
- ¿Qué sustitución se debe hacer en la fórmula, si el problema dice que la altura del envase cilíndrico A mide lo mismo que el diámetro, es decir, dos radios?

Pidan al profesor que les ayude a calcular el valor del radio del cilindro. También pueden usar una calculadora y encontrarlo por ensayo y error.

Presentación de nuestro trabajo

Presenten al grupo su proyecto. Comenten el procedimiento que siguieron para determinar sus valores.

- Durante su presentación, mencionen si tuvieron dificultades para determinar los datos de sus figuras y en qué casos, así como las estrategias que emplearon para resolver las dificultades.



¿Cómo nos fue?

- ¿Qué estrategias utilizaste para resolver cada uno de los problemas? ¿Qué dificultades se te presentaron?
- ¿A qué conclusión llegaste al formar dos cilindros diferentes con una misma hoja de papel? ¿Te sorprendió la respuesta?
- En las actividades que realizaste se fueron relacionando unas variables con otras (por ejemplo, superficie con volumen), y como viste, puede haber diferentes volúmenes para una misma superficie. ¿Puede haber diferentes superficies para un mismo volumen? ¿Qué aplicaciones prácticas pueden tener estos conocimientos?
- ¿En qué situaciones de tu vida cotidiana te podría ser útil lo aprendido en esta secuencia? Explícalo.

© SANTILLANA



Cierre

Contenido

Análisis de situaciones problemáticas asociadas a fenómenos de la física, la biología, la economía y otras disciplinas, en las que existe variación lineal o cuadrática entre dos conjuntos de cantidades.

Un experimento de nutrición

Analiza la información y responde en tu cuaderno.

Para entender el efecto de las proteínas de la levadura en la nutrición de ratas, en un laboratorio se hizo un experimento en el que las ratas fueron alimentadas con una dieta que contenía 10% de proteína. Los investigadores encontraron los datos que se muestran en la tabla siguiente.

Porcentaje de levadura en el alimento (L)	Peso promedio ganado en gramos (P)
3	25.55
7	31.55
9	33.95
23	39.55
32	32.8
44	11.2
58	-32.2

- ¿Cómo se comporta el peso ganado por las ratas en relación con el porcentaje de levadura en el alimento?
- ¿Alcanza el peso promedio ganado por las ratas un valor máximo?
- ¿Se pueden representar los datos de la tabla mediante una expresión algebraica?
- ¿La relación entre el peso ganado por las ratas y el porcentaje de levadura en el alimento es una relación funcional? ¿Cómo podrías comprobarlo?
- Si la relación anterior es funcional, ¿es lineal o cuadrática?

Comenta en grupo, y con ayuda del profesor, a qué conclusiones pueden llegar los investigadores al analizar los datos de su experimento.

Lee a continuación las características del proyecto que deben realizar.

Nuestro trabajo

En grupo harán un **experimento** para encontrar cómo cambian la longitud y el área de una figura proyectada cuando varía la distancia de la fuente de luz.

- Necesitarán un retroproyector, un metro, una regla, una hoja de cartulina negra y una hoja blanca tamaño carta. Si no cuentan con retroproyector, pueden usar una lámpara de mano.
- Al terminar el experimento, harán un reporte de los resultados que obtuvieron y, con base en estos, plantearán algunas conclusiones.

A lo largo de la secuencia encontrarán más información para trabajar en su proyecto.

El experimento de nutrición

Analiza del experimento de nutrición y responde en tu cuaderno.

- ¿Cuál es la variable independiente y cuál es la variable dependiente?
- ¿Por qué en la tabla de los datos del experimento la columna correspondiente al porcentaje de levadura en el alimento no indica unidades de medida?
- ¿En qué unidades se midió el peso ganado por las ratas?
- Explica cómo cambia el peso ganado por las ratas cuando se aumenta el porcentaje de levadura en el alimento.
- ¿Es lineal la relación entre el peso ganado por las ratas y el porcentaje de levadura en el alimento? Traza la gráfica correspondiente a los datos de la tabla de la página anterior y verifica tu respuesta.

Comenta con un compañero tus respuestas y, con ayuda del profesor, resuelve las dudas que hayan surgido.

Cambio de longitud del metal con la temperatura

Contesta en tu cuaderno.

La longitud del metal cambia cuando varía la temperatura del lugar donde se encuentra. Por ejemplo, la siguiente relación indica cómo cambia la longitud (L) de una barra de hierro con la temperatura (T): $L - L_0 = k(T - T_0)$.

- ¿Cuál es la variable independiente y cuál es la variable dependiente en esta relación? ¿Qué indican las letras L_0 y T_0 ?
- Si la constante k vale $0.0035 \text{ m}^\circ\text{C}$, ¿en qué unidades se mide la longitud L ? ¿En qué unidades se mide la temperatura?
- ¿Cómo cambia la longitud de la barra cuando aumenta la temperatura?
- Una barra de longitud $\frac{3}{4} \text{ m}$ a una temperatura de 19°C se coloca en un lugar donde la temperatura es de 40°C . ¿Cuál será su longitud en ese lugar?
- La misma barra que mide $\frac{3}{4} \text{ m}$ a una temperatura de 19°C se transportó a otro lugar. Después de un tiempo la barra midió $\frac{4}{5} \text{ m}$. ¿Cuál era la temperatura del lugar en el que se colocó?

Valida con el grupo tus respuestas y escribe tus conclusiones en el cuaderno.

**Historias
de vida**

Desde la época de Galileo, los científicos se percataron de la importancia de contar con relaciones algebraicas que les permitieran hacer cálculos para predecir el comportamiento de los fenómenos para distintos valores de las variables involucradas.

Los fenómenos físicos ocupaban la atención de la mayoría de los científicos; poco a poco, la misma metodología se comenzó a usar para describir el comportamiento de fenómenos de otros campos del conocimiento. Actualmente se dispone de muchos modelos algebraicos que describen fenómenos de la biología, la química, la física, así como del diseño industrial, la economía y las finanzas, entre otros campos del conocimiento.

Cambio de velocidad

Resuelve con un compañero la siguiente situación.

A continuación se muestra una tabla con los datos de una motocicleta que recorre un tramo de una carretera recta.

Tiempo (t) en minutos	Velocidad (v) en km/h
5	110
10	108
15	106
20	104
25	102
30	100
35	98
40	96
45	94
50	92

- Describan el movimiento de la motocicleta. _____
- Identifiquen la variable dependiente y la variable independiente. _____
- ¿Qué sucede con la velocidad de la moto a medida que el tiempo transcurre? _____
- Hagan una tabla igual en el cuaderno, pero con el tiempo expresado en horas en lugar de minutos. Analicen los datos de velocidad e identifiquen una secuencia. Después encuentren una regla que la describa.

Glosario

constante aditiva. Cuando en una relación funcional aparece un número que se suma o se resta a un término variable, ese número se conoce como constante aditiva.

- ¿Cuál es el cambio de la velocidad entre intervalos consecutivos de tiempo? _____
- ¿Cómo se relaciona el cambio que encontraron con el tiempo? _____
- ¿Pueden encontrar una expresión algebraica que describa esta relación funcional? ¿Es siempre posible encontrar una relación funcional que describa los datos de una tabla? ¿Por qué? _____
- En el problema, ¿qué significa la **constante aditiva** que encontraron? _____
- Usen la fórmula que encontraron para calcular:
 - la velocidad de la motocicleta cuando han pasado 32 minutos. _____
 - el tiempo que tardará la moto en llegar a 45 km/h. _____
 - la velocidad de la motocicleta en km/h y la distancia que recorrerá la moto en 5 horas. _____
- ¿Cómo podrían calcular la aceleración del movimiento de la motocicleta? _____

Comparen sus respuestas con las de otra pareja y corrijan sus errores.

Derretimiento del ADN

Lee la información y responde de manera individual.

La estructura del ADN se mantiene unida mediante puentes de hidrógeno entre los pares de bases nitrogenadas que la componen. Si se calienta una muestra de ADN, la unión entre las bases se debilita. Se necesita más energía para romper un par guanina/citosina que para romper uno de adenina/tiamina. El contenido en porcentaje de estos pares en una molécula de ADN se conoce como contenido GC, y la temperatura a la que se rompe el ADN se conoce como punto de derretimiento.

La siguiente tabla indica la relación entre el contenido GC de las muestras y su temperatura de derretimiento. Considera que cada muestra está compuesta por 250 pares de bases que difieren en su contenido GC.

y (porcentaje de pares GC en la muestra)	0%	20%	40%	60%	80%	100%
t (temperatura de derretimiento en °C)	79.5	87.7	95.9	104.1	112.3	120.5

- Describe cómo cambia la temperatura de derretimiento cuando cambia el porcentaje de GC en la muestra de ADN. _____
- ¿Cuál es la variable dependiente y cuál, la variable independiente? _____
- Explica qué sucede con la temperatura de derretimiento cuando el porcentaje GC de la muestra aumenta. _____
- ¿Cuál es el cambio de la temperatura para intervalos consecutivos de cambio en el porcentaje GC de la muestra? _____
- ¿Es lineal la relación entre la temperatura y el porcentaje GC de la muestra? Justifica tu respuesta. _____
- Encuentra una regla que describa la variación de la temperatura de derretimiento con el porcentaje GC de la muestra y utiliza dos datos distintos de la tabla. Después verifica que tu expresión funcione. _____
- ¿Qué significa en el problema la constante que encontraste? _____

- Usa la fórmula que escribiste para encontrar:
 - la temperatura de derretimiento de una muestra cuyo porcentaje GC es del 45.25%. _____
 - el porcentaje GC que se requiere para que la muestra se derrita a 115 °C. _____

Compara tus resultados con tus compañeros. En caso de que haya diferencias, busca los posibles errores y corrige en grupo.

¿Cómo vamos?

Reúnete con tus compañeros y sigan las instrucciones para su experimento.



- Ubiquen el retroproyector a 40 cm de la pared o de la pantalla. Coloquen un lápiz sobre el retroproyector y enfóquenlo para que se proyecte una imagen nítida. Midan la imagen y anótenla en el cuaderno.
- Modifiquen la distancia del retroproyector a la pared; aléjenlo 20 cm cada vez hasta que lleguen a una distancia de 160 cm. Midan la imagen del lápiz en cada caso.
- Registren en una tabla los datos que obtuvieron. Anoten en la primera columna la distancia del retroproyector a la pared y en la segunda, la medida del tamaño de la imagen del lápiz.
- Analicen los datos y escriban una relación funcional que describa cómo varía el tamaño de la imagen cuando se proyecta desde diferente distancia.

- Describan la fórmula y hagan un diagrama para explicar por qué sucede lo que observan.
- Escriban dos preguntas que se puedan responder utilizando la relación que encontraron.

Conserven esta información para elaborar el reporte que presentarán al terminar el proyecto.

Los resultados del experimento de nutrición

Analiza nuevamente los datos del experimento de nutrición y responde.

- ¿Es el peso ganado por las ratas proporcional al porcentaje de levadura en el alimento? ¿Por qué? _____
- La forma de la gráfica que trazaste en tu cuaderno, ¿corresponde a una función cuadrática? ¿Por qué? _____

- Los investigadores concluyeron que la expresión algebraica $P(L) = -0.05P^2 + 2P + 20$ describe la relación entre el peso ganado por las ratas y el porcentaje de levadura en el alimento. ¿Cuánto peso aumentarán las ratas si se les proporciona una dieta con 12% de levadura? _____
- ¿Cuánto peso aumentarán las ratas si se les proporciona una dieta con 35% de levadura? _____
- ¿Qué significa que las ratas ganen en promedio -32.2 g de peso cuando se les proporciona una dieta con 58% de proteína? Explica tu respuesta. _____
- ¿Qué porcentaje de levadura debe contener la dieta de las ratas para que ganen el mayor peso posible? Explica tu respuesta. _____
- Completa la gráfica que trazaste. ¿Es tu respuesta a la pregunta anterior consistente con la gráfica? Utiliza la relación que encontraron los investigadores para verificar tu respuesta.
 - ¿Para qué valores del porcentaje de levadura en el alimento no hay aumento de peso promedio de las ratas? ¿Cuántos valores encuentras? _____
 - ¿A qué puntos de la gráfica corresponden? Explica claramente cómo lo sabes. _____

Reúnanse en equipos de cuatro integrantes y comparen sus respuestas. Después contesten lo siguiente.

Cuando una empresa compra maquinaria, equipo o autos, el precio que pagó por ellos puede descontarse durante varios años en su contabilidad, pero no siempre con el mismo monto. Año con año el precio que se puede descontar es menor. Al hecho de que el precio de algo decrezca con el tiempo se le conoce como **depreciación**.

- El equipo de cómputo de una empresa puede depreciarse en \$550 pesos al año; si se compró por \$20 000, ¿cuál es la función que permite calcular el valor del equipo cada año? _____
- ¿Cuánto valdrá el equipo en 4 años? _____
- ¿Cuántos años deben pasar para que el equipo pierda completamente su valor? _____
- Inventen un problema relacionado con algún fenómeno físico en el que estén involucradas cantidades que varían una en función de la otra. _____

Validen su problema con el profesor e intercámbienlo con otro equipo para que lo resuelva.

En las actividades anteriores se presentaron situaciones en las que unas cantidades varían en función de otras. Hay muchas situaciones reales que se describen con **variables**. Describir y representar la relación entre variables es muy útil para entender el comportamiento de una gran diversidad de fenómenos.

Tareas

Resuelve los siguientes problemas en el cuaderno.

- El dueño de una fábrica de lámparas tiene dos tipos de costos mensuales en su proceso de producción. Los costos fijos, que son los mismos cada mes (el pago de la renta, los salarios, etcétera), y los costos variables, que son proporcionales al número de unidades que produce.

Considera que los costos fijos del empresario son de \$10000 y sus costos variables son de \$20 por cada unidad que produce en un mes.

- Escribe una relación que indique el costo total de la producción mensual de lámparas del empresario.
 - ¿Cuál es la variable independiente y cuál es la variable dependiente en esta relación?
 - Calcula los costos si se producen 850 lámparas.
 - ¿Cómo cambia el costo total del industrial cuando aumenta la producción?
 - ¿Cuántas lámparas produjo el industrial en un mes en el que sus costos fueron de \$52 740?
- La función de demanda de la fábrica de lámparas, es decir, la relación que muestra cuántas lámparas se deben producir con respecto al precio al que se venden, es la siguiente:

$$Q_d = 75 - \left(\frac{1}{4}\right)P$$

- Interpreta las variables que aparecen en la función.
- Escribe una función que te permita calcular el ingreso del dueño de la fábrica si dicho ingreso se obtiene al multiplicar el número de lámparas que vende por el precio de estas.
- Encuentra el precio de venta de las lámparas que hace que el ingreso del dueño sea cero.
- Usa la función que escribiste y elabora en el cuaderno una tabla en la que indiques el precio de las lámparas y el ingreso del dueño.
- Describe cómo se comporta esta función para distintos precios.
- ¿Para qué intervalo de precios crece el ingreso?
- ¿Para qué intervalo de precios decrece el ingreso?
- ¿Cuál es, aproximadamente, el precio que corresponde al ingreso máximo del dueño de la fábrica?

Revisa tu tarea en clase y valida tus respuestas. Si tienes dudas, pide ayuda al profesor.

© SANTILLANA

Pulsaciones por minuto

Reúnete con dos compañeros y respondan.

La siguiente tabla muestra la variación del pulso de una persona después de haber hecho ejercicio moderado durante 10 minutos.

Tiempo en minutos	0	1	2	3	4	5	6	7
Pulsaciones por minuto	166	140	118	100	86	76	70	68

- Analicen los datos y describan cómo cambian las pulsaciones de la persona con el tiempo. _____
- Identifiquen cuál es la variable dependiente y cuál es la variable independiente. _____
- Conforme pasa el tiempo, ¿qué sucede con el número de pulsaciones por minuto? _____
- Supongan que los datos siguen una regla de la forma $y - 68 = a(t - 7)^2$. ¿Esta fórmula describe correctamente los datos de la tabla? ¿Cuál es el valor de a que hace que la fórmula funcione para estos datos? _____
- Verifiquen que la expresión funcione utilizando dos datos distintos de la tabla.

Comparen sus respuestas con otro equipo y corrijan los errores que hayan surgido.

¿Cómo vamos?

Repitan el experimento que hicieron para calcular la variación del tamaño de la imagen del lápiz.

- En la cartulina negra, tracen y recorten un cuadrado y un círculo.
- Coloquen en el retroproyector el cuadrado que recortaron y proyéctenlo.
- Al igual que hicieron con el experimento del lápiz, modifiquen cuidadosamente la distancia del retroproyector (o de la lámpara de mano) a la pared, alejándolo 20 cm cada vez hasta llegar a una distancia de 160 cm.
- Registren en una tabla cómo varía el área del cuadrado que se proyecta a medida que cambia la distancia del proyector a la pared.
- Hagan lo mismo para el círculo.
- En cada caso, analicen los datos y escriban una relación funcional que describa la variación del área de cada figura con la distancia.
- Describan la fórmula y hagan un diagrama para explicar por qué sucede lo que observan.
- Escriban dos preguntas que se puedan responder utilizando la relación que encontraron.

© SANTILLANA

Telefonía celular

Lee la siguiente situación y contesta.

La señora Rodríguez quiere comparar los planes de dos compañías telefónicas. Según la información que ha recopilado, en una de ellas cobran \$0.10 por minuto de todas las llamadas que se hagan. En otra le cobran \$0.60 por mes, más \$0.05 por minuto de todas las llamadas que se hagan.

- Encuentra una expresión para cada compañía que relacione el costo con el tiempo total de las llamadas. _____
- Calcula cuánto costaría hablar 185, 347, 422 y 500 minutos al mes en cada una de las compañías. _____
- Traza en tu cuaderno la gráfica que representa los costos en función del tiempo de las llamadas para cada una de las compañías.
- ¿Cuánto tiempo debe usar el teléfono la señora Rodríguez para que le convenga contratar a la primera compañía? ¿Cuánto tiempo debe usarlo para que le convenga más contratar a la segunda compañía? _____
- ¿Hay alguna duración de las llamadas que permita que el costo sea el mismo en ambas compañías? Justifica tu respuesta. _____

Expongan en grupo las respuestas que encontraron y expliquen el procedimiento que siguieron para obtenerlas.

Escalas de temperatura

Lean la información en equipos y resuelvan lo que se pide.

Mes	T en $^{\circ}F$	T en $^{\circ}C$
Enero	32	0
Febrero	36	2.22
Marzo	47	8.33
Abril	59	15
Mayo	70	21.11
Junio	80	26.66
Julio	84	28.88
Agosto	82	27.77
Septiembre	75	23.88
Octubre	63	17.22
Noviembre	49	9.44
Diciembre	35	1.66

Mariana tiene una amiga, Lucía, que se fue a vivir a Chicago. En su última plática Lucía le comentó que estaba contenta de vivir ahí excepto por el clima que es muy extremo. Mariana le preguntó qué tanto variaba la temperatura porque estaba haciendo un proyecto para su clase de Matemáticas, Lucía le envió por correo electrónico una tabla de temperaturas máximas promedio de la ciudad de Chicago de todos los meses, en grados Fahrenheit, que es la escala de temperatura que se usa en Estados Unidos de América.

Como Mariana no entendía bien qué tanto calor o frío hacía realmente, buscó en Internet y encontró un programa que le convertía automáticamente la temperatura en grados Fahrenheit a la temperatura en grados Celsius o centígrados. Con esos datos hizo una tabla nueva y pudo darse cuenta de que en efecto la temperatura varía mucho en esta ciudad, y usar la información para su proyecto.

© SANTILLANA

- Ayuden a Mariana a terminar su proyecto. Contesten las preguntas.
 - ¿Es la relación entre la temperatura en grados Fahrenheit y la temperatura en grados Celsius lineal? ¿Por qué? _____
 - Usa los datos de la tabla para encontrar la relación entre las dos escalas de temperatura y escribe la relación. _____
 - Si el día que hablaron, la temperatura en la Ciudad de México era de $29^{\circ}C$, ¿a cuántos grados Fahrenheit equivale? _____
 - En Chicago, la temperatura era de $18^{\circ}F$, ¿a cuántos grados Celsius equivale? _____
 - ¿Hacia calor o frío en la Ciudad de México? ¿Y en Chicago? _____

Comenten sus respuestas en grupo y válídenlas con ayuda del profesor.

Velocidad de crecimiento de una población

Analiza la siguiente información. Después, contesta.

La función logística describe la velocidad a la que crece una población que vive en un ambiente en el que los recursos son limitados. En esas condiciones este modelo supone que la velocidad de crecimiento se reduce linealmente conforme la población aumenta. Esta ecuación tiene la siguiente forma algebraica: $V(p) = Kp(N - p)$

V es la velocidad a la que crece la población, K representa la razón a la que crece o decrece la población independientemente del medio en el que se encuentra, generalmente K representa la diferencia entre el índice de natalidad y el índice de mortalidad de una población y N representa el máximo número de pobladores que el ambiente que se quiere describir puede sustentar.

- ¿Qué tipo de función es $V(p)$? ¿Por qué? _____
- Si para una población de bacterias $K = 0.05$ al día y el valor máximo de población que puede sustentar el lugar en el que viven es de 22 000 habitantes, encuentra los valores de la población para los cuales la velocidad de crecimiento es cero.
 - ¿Cuántos valores encontraste? ¿Qué representa en el modelo cada uno de esos valores? _____
 - ¿Qué valor de N representa la máxima velocidad de crecimiento de la población? ¿Cómo lo encontraste? _____
- ¿Qué sucedería si al inicio de un experimento un biólogo colocara más de 22 000 bacterias en ese mismo ambiente? Explica claramente tu respuesta en términos del problema. _____

Compara tus respuestas con las de tus compañeros y juntos resuelvan sus dudas.

© SANTILLANA

Tareas

Resuelve los siguientes problemas en el cuaderno.

- Galileo encontró que cuando se deja caer un objeto desde una cierta altura, el tiempo transcurrido durante la caída y la altura a la que se encuentra el objeto se relacionan mediante la fórmula $d = \frac{1}{2}gt^2$, en la que g es la aceleración de la gravedad que vale 9.8 m/s^2 .
 - Usa la relación anterior y encuentra a qué altura en metros estará un objeto, para distintos tiempos medidos en segundos, si se deja caer desde una altura de 30 m.
 - Registra el tiempo en una tabla y describe qué sucede con la altura a medida que transcurre el tiempo.
- En un taller se calcula que la cantidad de metros de tablones de madera que se puede obtener de un árbol cuyo diámetro es d y cuya altura es de alrededor de 4 m está dado por la ecuación:
$$C(d) = 0.77d^2 - 1.32d - 9.31$$
En esta ecuación d representa el diámetro del árbol y C , la cantidad de metros de tablones de madera que se puede obtener de él.
 - Si un árbol tiene 28 cm de diámetro, ¿cuál es la cantidad aproximada de metros de madera que se puede obtener de él? ¿Cuánto debe medir el diámetro del árbol del cual se pueda obtener aproximadamente 300 metros de tablones de madera? Traza una gráfica para verificar tu respuesta.
- Una agencia de renta de autos ofrece sus servicios a una tarifa de \$40 por día y, gracias a un estudio económico, el gerente de la agencia sabe que por cada peso que se aumenta en la tarifa, tendrá cinco clientes menos.
 - Encuentra una relación que indique cuánto tiene de ingreso la agencia si renta x autos a \$40 diarios.
 - Haz una tabla que muestre cómo cambia el ingreso de la agencia si aumenta la tarifa a \$41, \$45, \$50, \$55, \$60 y así sucesivamente hasta \$80. Analiza la tabla y encuentra cómo varía el ingreso cuando aumenta el precio de renta a partir de los \$40.

Tarifa	Ingreso

- Si cuando cobraba \$40, la agencia tenía 300 clientes, usa la tabla para conocer la cantidad aproximada de clientes si obtuvo un ingreso de \$1 230.
- ¿Qué tarifa aproximada tendrá que cobrar para alcanzar el máximo ingreso? ¿Cuál es el máximo ingreso? ¿Cuántos clientes necesitaría tener la agencia para lograr ese ingreso?
- ¿Le conviene a la agencia cobrar \$60? ¿Por qué?

Revisa en grupo tu tarea y corrige tus errores, en caso de haberlos.

© SANTILLANA

¿Cómo vamos?

Reúnanse en equipos de cuatro integrantes. Utilicen la información de su proyecto y hagan lo que se indica.

- Tracen una gráfica que muestre cómo varía el tamaño de la imagen del lápiz y otra que muestre cómo varía el área del cuadrado y el área del círculo cuando se proyecta a diferente distancia.
- Analicen las gráficas e indiquen en cada una qué tipo de relación representan.
- Preparen un reporte con los resultados obtenidos y sus conclusiones.

Presentación de nuestro trabajo

Definan el orden en el que realizarán las presentaciones de los reportes que hicieron en equipos.

- Elijan un equipo para presentar al profesor los resultados del proyecto que realizaron en grupo.
- Elijan a un integrante de cada equipo para hacer la presentación de las gráficas.
- Sustenten sus conclusiones con las gráficas que trazaron en equipos.
- Comenten si tuvieron problemas para interpretar los datos de las tablas. ¿Encontraron las fórmulas que describen las relaciones en cada uno de los casos del proyecto?
- Comparen las gráficas que trazaron y elijan las mejores.

Planteen una conclusión grupal con ayuda de su profesor y escríbanla en su cuaderno.

¿Cómo nos fue?

- ¿Qué dificultades tuvieron al trabajar en grupo? ¿Qué ventajas consideran que tiene trabajar en grupo?
- ¿Pudieron organizar sin problemas la presentación de su proyecto? ¿Cómo lo hicieron?
- ¿Qué dificultades tuvieron para establecer la relación entre el tamaño o el área de las imágenes y la distancia entre el retroproyector y la pared?
- ¿Qué tipo de relación representa la longitud del lápiz y la distancia a la pantalla?
- ¿Cuál es la relación entre el área de las figuras y la distancia?
- Elige una situación de las que has trabajado a lo largo de la secuencia y dibuja una gráfica que describa cómo se comporta el fenómeno en cuestión. ¿Cuál de ellas es lineal? ¿Por qué?
- Con base en las actividades que realizaste en la secuencia, define qué es:
 - una función
 - una variable dependiente
 - una variable independiente

© SANTILLANA

Cierre

Cálculo de la probabilidad

Retomen el juego de la feria, resuelvan en pareja la siguiente actividad.

El espacio muestral es el conjunto de todos los posibles resultados individuales de un experimento aleatorio.

- Completen la tabla con el espacio muestral del juego 1.

+	1	2	3	4	5	6
1						
2						
3						
4						
5						
6						

- Cuenten la cantidad de resultados pares e impares y calculen la probabilidad de que la suma de ambos dados sea par y de que sea impar. Consideren lo siguiente:

$$P(\text{par}) = \frac{\text{Número de veces que la suma es par}}{\text{Total de resultados}}$$

$$P(\text{impar}) = \frac{\text{Número de veces que la suma es impar}}{\text{Total de resultados}}$$

- ¿Quién tiene mayor probabilidad de ganar? Expliquen por qué. _____
- Completen la tabla con el producto de los puntos de ambos dados para encontrar el espacio muestral del juego 2.

×	1	2	3	4	5	6
1						
2						
3						
4						
5						
6						

- Marquen con un círculo los números pares de la tabla del juego 2 y calculen estas probabilidades:
 $P(\text{impar}) = \underline{\hspace{2cm}}$ $P(\text{par}) = \underline{\hspace{2cm}}$
- ¿Quién tiene más probabilidad de ganar, el que elige par o el que elige impar?

 ¿Cómo deben ser los números para que su producto dé como resultado un número impar? ¿Y para que dé par? _____
- Expliquen si este juego es justo y argumenten su respuesta.

Comparen procedimientos utilizados y los resultados a los que llegaron.

¿Cómo vamos?

Reúnanse en equipo para trabajar en su proyecto.

Tracen su pista para jugar carreras de bicicletas, si decidieron dibujarla en el patio. Formen equipos de quince integrantes y jueguen una partida.

- Cada jugador debe elegir un número de 1 a 15 y se colocará en el carril correspondiente.
- Por turnos, cada participante tira los dos dados y avanza una casilla quien al sumar los dados el resultado coincida con su número. Gana el primero que llegue a la meta.

Después de jugar respondan:

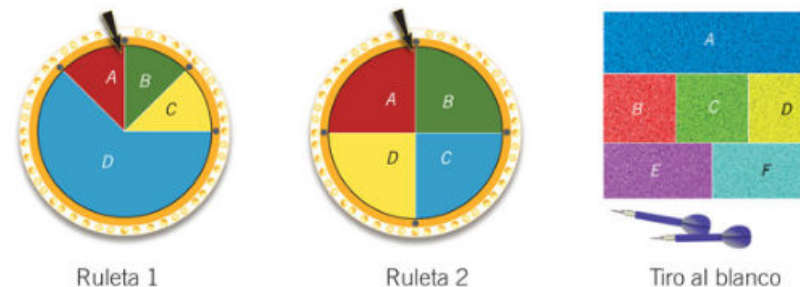
- ¿Quién ganó?, ¿por qué creen que resultó ganador?
- ¿Todos lograron avanzar casillas? Expliquen por qué.
- Si volvieran a jugar, ¿qué números no elegirían? Argumenten su respuesta.

Preparen su presentación y recuerden incluir una explicación acerca de si este juego es justo o no para cada uno de los participantes.

El juego de ruleta

Reunidos en parejas realicen las actividades.

En otro lugar de la feria, Juan y sus amigos se encontraron con un puesto de ruletas y tiro al blanco, como los que se muestran:



El precio de cada lanzamiento es de 10 pesos y se gana un premio de 20 pesos si la ruleta o el dardo caen en rojo.

- ¿En cuál de estos juegos creen que es más fácil acertar en el rojo? ¿Por qué?

- Si se gira 80 veces seguidas la ruleta 1, ¿cuál de los siguientes resultados creen que será más fácil que suceda?
 40 veces el rojo 20 veces el rojo 10 veces el rojo
- Si se gira 100 veces seguidas la ruleta 2, ¿cuántas veces se espera que la aguja se detenga en el rojo? ¿Y en el verde? _____
- Calculen la probabilidad de acertar en cada color en cada caso:
 Ruleta 1 $P(A) =$ $P(B) =$ $P(C) =$ $P(D) =$
 Ruleta 2 $P(A) =$ $P(B) =$ $P(C) =$ $P(D) =$
 Tiro al blanco $P(A) =$ $P(B) =$ $P(C) =$ $P(D) =$ $P(E) =$ $P(F) =$

Comparen sus respuestas con las de otros compañeros. En caso de que existan diferencias, argumenten sus resultados y validenlos con el profesor.

Tareas

Realiza la siguiente actividad.

1. En una bolsa se colocan tres papeles con el número 1 y cuatro con el 2. Cada uno de dos jugadores elige un número y, por turnos, saca un papelito. Gana el primero que saque el número que eligió.
 - a) Calcula la probabilidad de obtener cada número y explica por qué el juego es justo o no.
 - b) ¿De qué manera modificarías el juego para que ambos tengan la misma probabilidad de ganar?
2. Construye en el cuaderno una ruleta de colores, como las de la actividad anterior, de tal manera que todos los colores tengan la misma probabilidad de salir y otra en la que haya diferente probabilidad para cada color. Argumenta.

Al llegar al salón de clases, compara tus ruletas con las de tus compañeros.

¿Cómo vamos?

Retomen su proyecto y realicen lo que se solicita.

Jueguen por segunda vez carrera de bicicletas, pero ahora en lugar de 15 corredores solo habrá 11 cuyos números van del 2 al 12.

Para elegir su número, coloquen en una bolsa papelitos con números del 2 al 12 y, por turnos, tomen un papelito, el número que les salga es el que les corresponde.

- Elaboren y completen una tabla, como la que se muestra, con la frecuencia absoluta y relativa con la que cada corredor avanza.

	Número de casillas	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa (%)
2			
3			
4...			
...12			

- ¿Cuál ha sido la puntuación más frecuente?
- ¿Hay alguna bicicleta que no ha avanzado? ¿Por qué?
- Intenten explicar por qué unos resultados son más frecuentes que otros.
- Si volvieran a jugar, ¿por qué número apostarían?

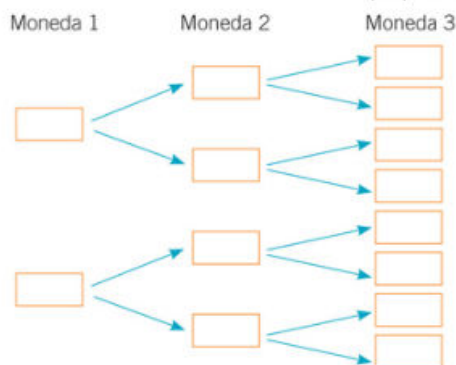
En el trabajo que presentarán al grupo incluyan una explicación acerca de por qué esta nueva modalidad del juego resulta o no justa.

Al final, cambiarán las reglas del juego para que todos los participantes tengan la misma probabilidad de ganar. Agreguen esta información en su reporte.

El juego de las tres monedas

Resuelve la actividad.

- Te proponemos practicar un juego con las reglas siguientes:



Se lanzan 3 monedas al aire. Si salen 2 soles o 2 águilas, el jugador *A* gana una ficha, pero si salen 3 soles o 3 águilas, entonces quien la gana es el jugador *B*.

El juego termina cuando se acaban las 20 fichas con las que se empezó el juego y gana quien más fichas obtuvo.

- ¿Crees que el juego es justo? ¿Por qué?
- ¿Prefieres ser el jugador *A* o el *B*?
- Practica cinco veces este juego con un compañero. Numera las monedas del 1 al 3 y lánzalas en ese orden.
- Haz una lista de los resultados distintos que se obtuvieron durante el juego. ¿Son todos los posibles o falta alguno?
- Completa el diagrama de árbol de la izquierda para calcular todos los posibles resultados al lanzar tres monedas al aire.

- Calcula la probabilidad de que gane el jugador *A*. _____
- Calcula la probabilidad de que gane el jugador *B*. _____
- Explica por qué el juego es justo o no. _____

Compara tu explicación con las de algunos compañeros y debate sobre ellas.

Se dice que dos o más eventos o sucesos son **equiprobables** si tienen la misma probabilidad de ocurrir. Por ejemplo, si se lanza una moneda al aire, la probabilidad de que salga águila o sol es la misma en ambos casos y es igual a $\frac{1}{2}$.

Dos eventos se llaman **no equiprobables** si tienen diferentes probabilidades de ocurrir. Por ejemplo, si se lanza un dado al aire, la probabilidad de que salga el 1 es igual a $\frac{1}{6}$, y la probabilidad de que el resultado sea par es $\frac{1}{2}$. Ambos eventos tienen distintas probabilidades de ocurrir.

La herencia genética

Lee la información y resuelve.

La base de la herencia genética humana se encuentra en los cromosomas, unas gigantes hebras de ADN (ácido desoxirribonucleico) en las que están escritas nuestras características biológicas. De estos cromosomas, presentes en casi todas las células, los humanos tenemos un total de 46; 23 se reciben del padre y 23 de la madre. Dos de estos 46 cromosomas determinan el sexo.

Como recibimos un cromosoma sexual de nuestro padre y otro de nuestra madre, las combinaciones finales, independientemente de qué progenitor nos lo transmita, solo pueden ser XX o XY. La combinación XX determina el sexo femenino y la combinación XY el sexo masculino.

- Completa la tabla para conocer el espacio muestral de todas las posibilidades:

	Mujer	X	X
Hombre			
X			
Y			

- ¿Cuál es la probabilidad de que una embarazada tenga un niño? _____
- ¿Cuál es la probabilidad de que sea niña? _____

Explica qué hiciste para calcular las probabilidades y compara tus resultados con los de otros compañeros.

Tareas

Resuelve estos problemas:

1. Eduardo tiene en su caja 10 bolas blancas y 20 negras. Luis tiene en otra caja 30 bolas blancas y 60 negras. Cada uno toma al azar una bola y quien saque una bola blanca es el ganador. Si ambos sacan simultáneamente una bola blanca o una bola negra, ninguno gana, devuelven las bolas a las cajas y la partida continúa. Eduardo afirma que el juego no es justo porque en la caja de Luis hay más bolas blancas que en la suya.
 - ¿Cuál es tu opinión? Argumentala. _____
2. María y Esteban juegan a los dados. María gana 10 pesos si el dado cae en 2, 3, 4, 5 o 6. Si resulta un 1, Esteban gana cierta cantidad de dinero.
 - ¿Cuánto debe ganar Esteban cuando sale el 1 para que el juego sea justo o equitativo? _____

Comenta los resultados y razonamientos con tus compañeros y maestro.

El juego Resdominó

Formen equipos de cuatro integrantes y jueguen varias partidas.

Resdominó se juega con un dominó. Consiste en tomar una ficha y restar los puntos, siempre al mayor se le resta el menor.

Instrucciones:

- Cada jugador debe elegir un número de cero a seis y anotarlo en una tabla.
- Se colocan todas las fichas con los puntos hacia abajo.
- Por turnos, los jugadores darán vuelta a una de las fichas y restarán los números que aparecen representados en ella.
- Cada ficha que se extrae no se vuelve a utilizar.
- Gana quien consigue primero dar vuelta a una ficha cuya resta coincida con el número elegido.
- Pueden cambiar en cada partida el número que escogieron al principio.
- ¿Todos los jugadores tienen la misma posibilidad de ganar? ¿Por qué? _____
- En las partidas que jugaron, ¿qué números fueron los ganadores? _____
- Comenten si el juego es equiprobable, es decir, si todos tienen la misma probabilidad de ganar.
- Completen la tabla para determinar si el juego es o no equiprobable. Cada par ordenado de números representa los puntos de las fichas de dominó.

Ficha	(6, 6)	(6, 5)	(6, 4)	(6, 3)	(6, 2)	(6, 1)	(6, 0)
Resta	0						
Ficha	(5, 5)	(5, 4)	(5, 3)	(5, 2)	(5, 1)	(5, 0)	
Resta							
Ficha	(4, 4)	(4, 3)	(4, 2)	(4, 1)	(4, 0)		
Resta							
Ficha	(3, 3)	(3, 2)	(3, 1)	(3, 0)			
Resta							
Ficha	(2, 2)	(2, 1)	(2, 0)				
Resta							
Ficha	(1, 1)	(1, 0)					
Resta							
Ficha	(0, 0)						
Resta							

- Calculen la probabilidad de que ocurra cada resultado.
- ¿Qué número les convendría elegir para tener mayor probabilidad de ganar?
- ¿Cómo podrían cambiar las reglas del juego para que todos los participantes tengan la misma probabilidad de ganar?

Expliquen las nuevas reglas a sus compañeros y por qué resultan justas para todos los participantes.

En equipo, analicen los juegos que realizaron en esta secuencia e indiquen cuáles son equitativos y cuáles no. En cada caso, expliquen el porqué.

Juego	Equitativo	No equitativo	¿Por qué?
Carrera de bicicletas			
Todos ganan 1			
Todos ganan 2			
El juego de la ruleta			
El juego de las tres monedas			
El juego Resdominó			

Presentación de nuestro trabajo

Presenten a sus compañeros su explicación sobre las probabilidades de cada competidor de ganar el juego carrera de bicicletas en cada una de las modalidades sugeridas.

- Expliquen cómo cambiarían las reglas del juego para que todos los participantes tengan la misma probabilidad de ganar.
- Realicen algunas partidas del juego para comprobar si sus reglas corresponden a un juego equitativo.

Comparen las respuestas con las de otros compañeros. En el caso de que tengan resultados distintos, analicen y busquen el porqué de las diferencias.

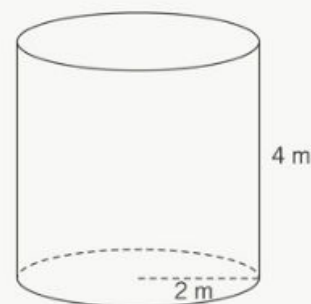
¿Cómo nos fue?

- Antes de resolver las actividades propuestas, ¿pensabas que ganar cualquier juego era cuestión de suerte? ¿Cambió tu opinión después de realizarlas?
- En la carrera de bicicletas, ¿todos los participantes tienen la misma probabilidad de ganar? ¿Es un juego justo para todos?
- El que eligió el número 1 en la primera partida, ¿tuvo probabilidades de avanzar? ¿Por qué?
- ¿Cuáles son los números de corredor que no pueden avanzar?
- De los que avanzan, ¿cuál tiene mayor probabilidad de ganar?
- ¿Cambiaste el número de jugador en las diferentes partidas?
- ¿Cuáles podrían ser las reglas del juego para que sea justo y todos tengan igual probabilidad de ganar?
- En el juego de Todos ganan, ¿en cuál conviene más apostar a un número par? Argumenta tu respuesta.
- Escribe las reglas de algún juego que conozcas y explica si todos los participantes tienen la misma probabilidad de ganar.

Evaluación tipo PISA

UNIDAD: El depósito

En una fábrica de bebidas se tiene un depósito cilíndrico, como el que se muestra en la imagen. Cuando se abre la llave A, el depósito tarda 12 horas en llenarse y cuando se abre la llave B tarda 6 horas. En ambos casos el flujo del líquido es constante.



Pregunta 1: EL DEPÓSITO

Contexto: Escolar

Aprendizaje esperado: Lee y representa, gráfica y algebraicamente, relaciones lineales y cuadráticas.

Si consideramos que el depósito se llena con la llave A, ¿cuál de las siguientes expresiones representa el nivel del agua (y) en metros en función del tiempo (x) en horas?

a) $y = \frac{x}{3}$

b) $y = 3x$

c) $y = x + 3$

d) $y = x - 3$

Pregunta 2: EL DEPÓSITO

Contexto: Laboral

Aprendizaje esperado: Resuelve problemas que implican calcular el volumen de cilindros y conos o cualquiera de las variables que intervienen en las fórmulas que se utilicen. Anticipa cómo cambia el volumen al aumentar o disminuir algunas de las dimensiones.

Considera que se construye un depósito semejante al anterior, pero se duplica la medida del radio de la base y se disminuye la altura a la mitad. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?

- a) El volumen del nuevo depósito es igual al del primero.
- b) El volumen del nuevo depósito es el doble del primero.
- c) El volumen del nuevo depósito es la mitad del primero.
- d) El volumen del nuevo depósito es el triple del primero.

Pregunta 3: EL DEPÓSITO

Contexto: Escolar

Aprendizaje esperado: Resuelve y plantea problemas que involucran ecuaciones lineales, sistemas de ecuaciones y ecuaciones de segundo grado.

¿En cuánto tiempo se llenaría el depósito en caso de que se abran las dos llaves al mismo tiempo? Escribe las operaciones necesarias.

Respuesta: _____

© SANTILLANA

UNIDAD: Los dados diferentes

Carlos y sus amigos juegan a lanzar dos dados, uno de cuatro caras, numeradas de 1 a 4 y otro de doce caras, numeradas de 1 a 12.

El juego consiste en anticipar el resultado de multiplicar los puntos obtenidos en ambos dados.

Antes de lanzarlos, los jugadores deben decir un número.

Una vez que se lanzan los dados se multiplican los puntos obtenidos.

En el dado de doce caras se considera el número de la cara que queda arriba; en el de cuatro caras, el número de la que queda abajo.

Gana el jugador que haya acertado el producto obtenido.



Pregunta 1: LOS DADOS DIFERENTES

Contexto: Público

Aprendizaje esperado: Resuelve problemas que implican calcular la probabilidad de eventos complementarios, mutuamente excluyentes e independientes.

Analiza las afirmaciones y señala la opción que corresponde. Argumenta tus respuestas.

La probabilidad de que el producto sea un número diferente de 24 es 0.0625.	Verdadero	Falso
La probabilidad de que el producto no sea 48 es $\frac{47}{48}$.	Verdadero	Falso
La probabilidad de que el producto sea 1 o 2 es 6.25%.	Verdadero	Falso

Pregunta 2: LOS DADOS DIFERENTES

Contexto: Público

Aprendizaje esperado: Resuelve problemas que implican calcular la probabilidad de eventos complementarios, mutuamente excluyentes e independientes.

¿Qué probabilidad hay de que en un lanzamiento se obtenga un producto menor que 12 o mayor que 36?

a) $\frac{7}{16}$

b) 50%

c) 0.25

d) $\frac{3}{48}$

Pregunta 3: LOS DADOS DIFERENTES

Contexto: Público

Aprendizaje esperado: Resuelve problemas que implican calcular la probabilidad de eventos complementarios, mutuamente excluyentes e independientes.

¿Qué probabilidad hay de que en un lanzamiento se obtenga un producto menor que 24 y en el siguiente se obtenga un producto mayor que 24? Justifica tu respuesta.

Respuesta: _____

© SANTILLANA

Para el estudiante

Impresas

- Berlanga, Ricardo, Carlos Bosch y Juan José Rivaud (2009). *Las matemáticas, perejil de todas las salsas*, México: Fondo de Cultura Económica (colección Ciencia para Todos).
- Bosch, Carlos (2009). *El billar no es de vagos. Ciencia, juego y diversión*, México: Fondo de Cultura Económica (colección Ciencia para Todos).
- Callejo, María Luz (1998). *Un club matemático para la diversidad*, Madrid: Narcea.
- Casas, Esperanza (1998). *Juegos matemáticos. La magia del ingenio*, Colombia: Cooperativa Editorial Magisterio.
- De la Peña, José Antonio (2009). *Álgebra en todas partes*, México: Fondo de Cultura Económica (colección Ciencia para Todos).
- Magnus Enzensberger, Hans (1998). *El diablo de los números*, 3ª ed., Madrid: Siruela.
- Perelman, Yacob (2007). *Matemáticas recreativas*, Madrid: Rodesa (Biblioteca Desafíos Matemáticos).
- Perrero, Mariano (1994). *Historia e historias de matemáticas*, México: Grupo Editorial Iberoamérica.
- Prieto, Carlos (2009). *Aventuras de un duende en el mundo de las matemáticas*, México: Fondo de Cultura Económica (colección Ciencia para Todos).
- Ricotti, Stella (2005). *Juegos y problemas para construir ideas matemáticas*, México: Novedades Educativas.
- Talanquer, Vicente (2009). *Fractus, Fracta, Fractal. Fractales, de laberintos y espejos*, 1ª reimpresión, México: Fondo de Cultura Económica (colección Ciencia para Todos).
- Snape, Charles (2005). *Sal si puedes. Laberintos y rompecabezas matemáticos*, México: Noriega-Limusa Infantil.

Electrónicas

- bibliotecadigital.ilce.edu.mx/sites/telesecundaria/
Ofrece actividades de los temas que trabajarás en la secundaria
Consulta: 23 de diciembre de 2016, 12:21 h.
- www.geogebra.org
Software de geometría dinámica gratuito que te permite hacer construcciones útiles para geometría, álgebra, cálculo, entre otros. Es una herramienta fácil de usar y adecuada para tu edad.
Consulta: 23 de diciembre de 2016, 11:52 h.
- arquimedes.matem.unam.mx/PUEMAC/Secundaria.html
Aquí encontrarás interactivos que permiten abordar diversos temas propuestos para la secundaria.
Consulta: 27 de diciembre de 2016, 11:37 h.
- www.librosmaravillosos.com/matestahi01/index.html
Página en la que podrás encontrar el libro *Matemática... ¿Estás ahí?*, del autor Adrián Paenza y descargar la primera parte del mismo.
Consulta: 23 de diciembre de 2016, 11:53 h.
- www.librosmaravillosos.com/matestahi02/index.html
Aquí podrás leer y descargar el episodio 2 del libro de *Matemática... ¿Estás ahí?*, de Adrián Paenza.
Consulta: 23 de diciembre de 2016, 11:54 h.

Para el profesor

Impresas

- Alsina, Claudi, Carme Burgués y Josep María Fortuny (1987). *Invitación a la didáctica de la geometría*, Madrid: Síntesis (colección Matemáticas: cultura y aprendizaje).
- Alsina, Claudi, Carme Burgués y Josep María Fortuny (1998). *Materiales para construir la geometría*, Madrid: Síntesis (colección Matemáticas: cultura y aprendizaje).
- Bosch, Carlos (2009). *El billar no es de vagos. Ciencia, juego y diversión*, México: Fondo de Cultura Económica (colección Ciencia para Todos).
- Chevallard, Yves, Mariana Bosch y Joseph Gascón (1998). *Estudiar matemáticas: El eslabón perdido entre enseñanza y aprendizaje*, México: SEP (Biblioteca del Normalista).
- De la Peña, José Antonio (2009). *Álgebra en todas partes*, 5ª reimpresión, México: Fondo de Cultura Económica (colección Ciencia para Todos).
- Fernández, Antonio y Luis Rico (1992). *Prensa y educación Matemática*, Madrid: Síntesis (colección Matemáticas: cultura y aprendizaje).
- Grupo Beta (1990). *Proporcionalidad geométrica y semejanza*, Madrid: Síntesis (colección Matemáticas: cultura y aprendizaje).
- Magnus Enzensberger, Hans (1998). *El diablo de los números*, 3ª edición, Madrid: Siruela.
- Mlodinow, Leonard (2010). *El andar del borracho: Cómo el azar gobierna nuestras vidas*, Madrid: Crítica.
- Perelman, Yacob (2007). *Matemáticas recreativas*, Madrid: Rodesa (Biblioteca Desafíos Matemáticos).
- Revista *Educación Matemática*, México: Santillana.
- Saiz, Irma y Cecilia Parra (comp.) (1995). *Didáctica de las matemáticas: Aportes y reflexiones*, Buenos Aires, Argentina: Paidós.
- Secretaría de Educación Pública (2001). *Fichero de actividades didácticas. Matemáticas. Educación Secundaria*, México: SEP.
- Stewart, Ian (2008). *Belleza y verdad: Una historia de la simetría*, Barcelona: Crítica.
- Stewart, Ian (2007). *Cartas a una joven matemática*, Barcelona: Crítica.
- Stewart, Ian (2007). *Cómo cortar un pastel y otros rompecabezas matemáticos*, Barcelona: Crítica.
- Stewart, Ian (2008). *Historia de las matemáticas: En los últimos 10000 años*, Barcelona: Crítica.
- Stewart, Ian (2007). *Juega a los dados*, Barcelona: Crítica.
- Ursini, Sonia, Fortiño Escareño, Delia Montes y María Trigueros (2003). *Enseñanza del álgebra elemental. Una propuesta alternativa*, México: Trillas.

Electrónicas

- red.ilce.edu.mx
En esta página encontrará recursos didácticos acerca de las asignaturas que forman parte del currículo escolar.
Consulta: 23 de diciembre de 2016, 12:07 h.
- basica.sep.gob.mx/
Ofrece actividades de los temas abordados en las secuencias.
Consulta: 23 de diciembre de 2016, 12:09 h.

- www.ugr.es/~dpto_did/pages/enlaces.html
Página de la Universidad de Granada, España, donde podrá descargar artículos especializados en Matemáticas.
Consulta: 23 de diciembre de 2016, 12:10 h.
- www.geogebra.org
Este software de geometría dinámica es gratuito y permite hacer construcciones útiles para geometría, álgebra, cálculo, entre otras disciplinas de estudio. Es una herramienta fácil de usar y adecuada para la enseñanza.
Consulta: 23 de diciembre de 2016, 11:57 h.
- www.telesecundaria.sep.gob.mx/
Ofrece actividades interactivas para la enseñanza de las matemáticas para profesores y alumnos.
Consulta: 23 de diciembre de 2016, 12:13 h.
- arquimedes.matem.unam.mx/PUEMAC/Secundaria.html
Aquí encontrará interactivos que permiten abordar diversos temas propuestos para la educación secundaria.
Consulta: 23 de diciembre de 2016, 12:15 h.

Bibliografía consultada

Impresa

- Alsina, Claudi, Carme Burgués y Josep María Fortuny (1987). *Invitación a la didáctica de la geometría*, Madrid: Síntesis (colección Matemáticas: cultura y aprendizaje).
- Alsina, Claudi, Carme Burgués y Josep María Fortuny (1998). *Materiales para construir la geometría*, Madrid: Síntesis (colección Matemáticas: cultura y aprendizaje).
- Batanero, Carmen y Carmen Díaz (2004). *El Papel de los proyectos en la enseñanza y aprendizaje de la estadística*, ICE, Zaragoza: Editorial J. Patricio Royo.
- Batanero, Carmen y Juan D. Godino (1994). *Errores y dificultades en la comprensión de los conceptos estadísticos elementales*, en *International Journal of Mathematics Education in Science and Technology*, vol. 25, núm. 4.
- Batanero, Carmen (2005). *Significados de la probabilidad en la educación secundaria*, en R. Farfán y cols. *Relime*, vol. 8, núm. 3.
- Cobo, Belén y Carmen Batanero (2000). *La mediana: ¿Un concepto sencillo en la enseñanza secundaria?*, en *UNO*, núm. 23, p. 85-96.
- Contreras, Mauricio y Bernardo Gómez, (1992). *Un estudio sobre las variables de los problemas verbales de división de fracciones*, en *Indivisa*. Boletín de Estudios e Investigación. Monografía Fernández, A. y L. Rico, "Prensa y educación Matemática", Madrid: Síntesis.
- Grupo Beta (1990). *Proporcionalidad geométrica y semejanza*, Madrid: Síntesis (colección Matemáticas: cultura y aprendizaje).
- Guedj, Denis (2000). *El teorema del loro*, Barcelona: Anagrama.
- Mayén, Silvia, Belén Cobo, Carmen Batanero y Patricia Balderas (2007). *Comprensión de las medidas de posición central de los estudiantes mexicanos de bachillerato*, en *Unión*, Revista iberoamericana en educación matemática.
- Navarro-Pelayo, Virginia, Carmen Batanero y Juan Godino (1996). *Razonamiento combinatorio en alumnos de secundaria*, en *Educación Matemática*, vol. 8, núm. 1, p. 26-39. Madrid: Síntesis.



santillana.com.mx

ISBN 978-607-01-2260-6



9 786070 122606



DISTRIBUCIÓN GRATUITA
PROHIBIDA SU VENTA